

ОМСКАЯ ГУМАНИТАРНАЯ АКАДЕМИЯ

А. И. Ридченко

**Математические методы
В ЭКОНОМИКЕ**

Учебное пособие для студентов направлений подготовки высшего образования – бакалавриата «Экономика», «Государственное и муниципальное управление»

УДК 330.4

К 65

Р495

Рецензенты:

А. Л. Карпов, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической теории и предпринимательства Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского.

В. Ю. Епанчинцев, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики, бухгалтерского учета и финансового контроля ОмГАУ им. П. А. Столыпина.

Ридченко, А. И.

495 Математические методы в экономике : учебное пособие для студентов направлений подготовки высшего образования – бакалавриата «Экономика», «Государственное и муниципальное управление» / А. И. Ридченко.– Омск : Изд-во ОмГА, 2016. – 80 с.

ISBN 978-5-98566-108-8

В учебном пособии освещены основные понятия, методы и приемы экономико-математического моделирования и прогнозирования. Пособие предназначено для бакалавров дневного и заочного обучения направлений подготовки «Экономика», «Государственное и муниципальное управление».

Пособие может быть полезно тем, кто интересуется вопросами экономического, экономико-математического моделирования.

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Оглавление

Введение.....

Глава 1. Основные понятия и порядок моделирования.....

Глава 2. Статистические методы и модели

2.1. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа.....

2.2. Регрессионно-корреляционные зависимости.....

2.3. Оценка показателей и подготовка массивов данных.....

Глава 3. Сетевые методы планирования.....

3.1. Элементы сетевой модели.....

3.2. Табличный расчет модели.....

3.3. Задачи сетевого планирования и управления

Глава 4. Прогнозные модели и экстраполяционные методы.....

4.1. Организация процесса прогнозирования

4.2. Стоимостные прогнозы.....

4.3. Экстраполяционные методы.....

Глава 5. Другие экономико-математические методы и модели

5.1. Понятие об имитационном моделировании.....

5.2. Методы экспертных оценок.....

Заключение.....

Библиографический список

Введение

Цель учебного пособия – оказать помощь в изучении теоретико-математической дисциплины «Математические методы в экономике». В нем кратко изложены основные разделы в соответствии с действующим государственным образовательным стандартом по указанной дисциплине.

Процесс социально-экономического моделирования – это конкретные формы теоретического или практического подхода к разработке экономико-математических моделей. Способ моделирования – это получение и обработка информации о будущем на основании имеющейся информации о настоящем и прошлом. Системы моделирования и прогнозирования – это набор моделей, методик и способов, технических средств, предназначенных для проектирования и прогнозирования сложных социально-экономических явлений и процессов.

В учебном пособии сделана попытка увязать между собой такие дисциплины, как экономика, математическая статистика, эконометрика. Экономика ставит перед исследователем определенную задачу, а именно: дать «хороший» прогноз на ту или иную интересующую его проблему, а математические дисциплины помогают ему решить эту задачу аналитически, при этом гарантируя «наилучший» прогноз.

широко описаны системы статистических уравнений, которые широко применяются для моделирования микроэкономических процессов.

Четвертая глава относится к введению в курс экономического прогнозирования, знакомит с такими разделами, как прогнозирование и прогностика, экономика и прогностика, этапы прогнозирования статистического процесса, статистические методы экономического прогнозирования, формальные методы экономического прогнозирования. Приведено достаточное число примеров, иллюстрирующих использование моделей и методов прогнозирования.

Глава 1. Основные понятия и порядок моделирования

Экономические процессы протекают в условиях сложного переплетения самых разнообразных факторов – социально-экономических, производственных, географических и др. Поэтому исследование экономических процессов, анализ их развития, прогноз весьма затруднены. Как поведет себя экономическая система в результате воздействия на нее в сложных условиях, заранее предположить, не пользуясь никакими специальными подходами и методами, очень трудно. В то же время ответственность за принятие решений очень большая, так как от результатов функционирования экономических систем зависит судьба предприятий и работающих на них людей.

Рассмотрим основные понятия моделирования.

Модель – это упрощенное подобие исследуемой системы (производственного объекта), обладающее существенными свойствами и соотношениями. Модели как установленные объекты исследований или управления представляются важнейшим инструментом познания и используются в различных областях науки и техники. Понятие модели вытекает из наличия некоторого сходства между двумя объектами. Один из них может рассматриваться как оригинал, а другой – как его модель. Соответствие между оригиналом и его моделью заключается в сходстве поведения. Модель не обязательно должна копировать оригинал (например, экономический процесс). Воспроизводя реальный процесс, модель упрощает его, отвлекаясь от ряда несущей

Математическое моделирование экономических процессов неразрывно связано с проблемой обеспечения его экономическими данными, информацией.

Основные виды информации:

- плановая, используемая и получаемая при перспективном годовом и оперативном планировании производства;
- оперативная, возникающая в процессе организации производства и управления;
- учетно-отчетная, связанная с текущей отчетностью, бухгалтерским учетом и статистической отчетностью.

Таким образом, под **экономической информацией** можно понимать всю совокупность сведений об экономическом процессе и о среде, в которой находится данная система, т. е. совокупность сведений, необходимых для решения конкретных задач управления, планирования или анализа.

Классификация моделей связана со многими факторами использования:

- вид моделируемых процессов;
- временные характеристики;
- уровни управления;
- назначение модели;
- используемый математический аппарат;
- используемая информация.

Методы моделирования чаще всего разбивают на несколько основных групп, например:

1. Моделирование экономических процессов (пример – межотраслевой баланс).

Процесс моделирования можно условно разделить на этапы:

- изучение среды для структурирования ситуации;
- формализация представления о ситуации;
- построение символической (количественной) модели.

Чтобы поставленная проблема была адекватна реальности, очень важно грамотно провести первый этап – структурирование управленческой ситуации.

Второй этап формализации заключается в концептуальной формализации, во время которого необходимо принять определенные допущения и упрощения.

Порядок моделирования может быть представлен в следующем виде (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Порядок моделирования: 1 этап: постановка задачи и ее качественный анализ; 2 этап: формирование математической модели (выбор определенной модели); 3 этап: математический анализ модели (оценка возможностей); 4 этап: сбор технико-экономической информации; 5 этап: численное решение; 6 этап: анализ результатов и использование

Наибольшей трудностью моделирования является трудность интерпретации результатов. Интерпретативность моделирования может быть признана недостатком и критической на любом этапе, и приходится возвращаться к началу или к началу из предыдущих этапов и начинать моделирование с

модели. Некоторые из этих моделей используются предварительно для экспериментальной проверки гипотез на ряде вариантов, другие используются непосредственно в ходе подготовки и реализации решений.

Укрупненно используемые модели можно разделить на несколько групп:

1. Группа моделей оптимизации:

- сетевые модели;
- управление запасами;
- модели статистических решений;
- модели теории игр;
- модели массового обслуживания;
- оптимальное программирование (среди них: линейное, нелинейное программирование и другие);
- комбинаторные задачи.

2. Группа экономико-статистических моделей:

- задачи математической статистики;
- модели регрессионно-корреляционного анализа.

3. Группа моделей экономической кибернетики:

- системный анализ;
- модели имитационного моделирования.

Приведенный перечень включил только части моделей, которые могут быть использованы при подготовке решений.

Использование методов экономико-математического моделирования и моделей широко, они применяются во всех разделах экономики:

- в организации производственных процессов;

- анализе фондов, трудовых ресурсов, во многих областях анализа;
- для оценки перспектив и прогнозирования функционирования производства и экономики на разных уровнях.

Таким образом, экономико-математическое моделирование и порядок его реализации позволяют добывать качественно новые знания об исследуемых объектах на основе количественного анализа и предлагать наилучшие управленческие решения (УР) во многих сферах созидательной деятельности общества. Применение экономико-математических моделей предполагает научное обоснование плановых и прогнозных расчетов [1, с. 16–28; 7, с. 55; 8, с. 7–18].

Контрольные вопросы

1. Определите понятие «модель».
2. Какие типы моделей существуют?
3. Перечислите основные виды экономической информации.
4. Приведите основную классификацию использования моделей.
5. На какие группы разбиваются методы моделирования?
6. Какие этапы проходит процедура экономико-математического моделирования?
7. В каких областях экономики используются методы экономико-математического моделирования и экономико-математические модели?
8. В чем заключается специфика экономико-математического моделирования?

Глава 2. Статистические методы и модели

Корреляционный и регрессионный методы анализа являются одним из основных классов статистических моделей и методов, они нашли широкое применение при решении разнообразных задач, связанных с изучением массовых закономерностей производственных, экономических процессов с целью определения характеристик, повышения объемов выпуска продукции и эффективности сферы услуг.

2.1. Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа

Корреляция – это взаимозависимость, взаимное соответствие, соотношение величин в условиях влияния многочисленных факторов, совместно действующих на одну из сторон процесса взаимосвязанных между собой.

При решении задач производственно-хозяйственной деятельности предприятия методы корреляционного анализа могут быть использованы:

- для исследования показателей уровней специализации предприятия;
- анализа производительности труда;
- планирования себестоимости услуг и продукции;
- анализа и планирования использования производственных фондов;
- анализа или планирования использования трудовых ресурсов

- оценку связи между показателями, которые функционально не связаны и измеряются в любых единицах (например, выработка и квалификация);
- достаточную точность в расчетах для практического использования;
- выполнение расчетов с использованием персонального компьютера (ПК).

К недостаткам использования можно отнести:

- трудности выделения исследуемых факторов;
- недостаточно большую выборку данных исследуемого процесса.

При выполнении корреляционных расчетов необходимо различать факториальный и функциональный признаки.

Факториальным признаком называется такой признак, от которого зависит другой, т. е. сам он является независимым признаком. В отличие от него зависимый признак называется функциональным. В процессе формализации экономико-статистической модели факториальный признак обозначается через X , а функциональный – через Y .

Корреляционный и регрессионный методы анализа включают себя несколько этапов:

- 1) постановку задачи и выбор факторных и результативных признаков, оценку необходимого объема данных;
- 2) сбор статистического материала, его проверку;
- 3) предварительное изучение взаимосвязей с помощью графиков и аналитических группировок;
- 4) изучение парных взаимосвязей;
- 5) исследование многофакторной зависимости;

Методы корреляционно-регрессионного анализа позволяют устанавливать количественные характеристики исследуемых экономических субъектов.

Однако перед постановкой задачи необходимо выбрать объект исследования и получить основные технико-экономические показатели, характеризующие результаты его производственно-хозяйственной деятельности, так как набор объектов исследования в значительной степени определяет формулировку модели.

После выбора объекта исследования и постановки задачи на втором этапе определяется объем статистической выборки.

Выборочное наблюдение состоит из следующих процедур:

- ✓ постановки цели наблюдения;
- ✓ составления программы наблюдения и разработки методов сбора данных;
- ✓ решения организационных вопросов наблюдения;
- ✓ определения процента отбора и способа отбора;
- ✓ проведения отбора;
- ✓ регистрации соответствующих признаков (по программе) у отобранных единиц;
- ✓ отношения данных наблюдения и расчета выборочных характеристик;
- ✓ расчета ошибок выборки;
- ✓ пересчета выборочных характеристик на всю совокупность.

Если выборочное наблюдение проведено с соблюдением всех правил организации, то данные выборки верно характеризуют всю статистическую совокупность, и практика применения

бор, генеральной совокупностью. Для того, чтобы выборочная совокупность достаточно полно отражала генеральную, необходимо соблюдение ряда условий.

Вследствие того, что предприятия, выполняющие услуги сервиса, могут характеризоваться малой мощностью, низкой степенью механизации процессов и т. д., при использовании методов корреляционного и регрессионного анализа чаще всего приходится сталкиваться с малыми выборками (обычно число наблюдаемых единиц в малой выборке не превышает 30, а иногда составляет всего 4–5 единиц).

Необходимая численность выборки в этом случае находится по формуле:

$$n = \frac{t^2 \delta^2}{\Delta^2}, \quad (2.1)$$

где t – коэффициент Стьюдента;

δ – среднее квадратическое отклонение признака;

Δ – ошибка выборочного наблюдения.

Предельная ошибка выборочного обследования Δ определяется по формуле $\Delta = t_{\mu}$, где t – коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента), μ – средняя ошибка выборки. Средняя ошибка выборки определяется следующим образом: $\mu = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, где δ^2 –

дисперсия $\left[\delta = \pm \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \right]$, где n – количество отобранных единиц; \bar{X} – среднее значение X_i .

Далее приступают к третьему этапу изучения корреляционной связи.

Предварительное изучение взаимосвязей с помощью графиков начинается с построения поля корреляции, которое представляет собой график, отражающий связь между статистическими показателями, при этом необходимо соблюдать следующие условия: для нанесения точек на поле корреляции необходимо пользоваться только исходной статистической информацией, которая не подвергалась какой-либо обработке. Построение поля корреляции является очень ответственным этапом статистического моделирования, так как полученное распределение точек служит основой для дальнейших расчетов.

Если каждому значению аргумента X_i соответствует Y_i и с изменением X эти ряды закономерно изменяют свое положение, тогда говорят, что Y находится в корреляционной зависимости от X [6, с. 164–349].

2.2. Регрессионно-корреляционные зависимости

Следующим этапом статистического моделирования является исследование формы связи. Для этого производится расчет эмпирической линии регрессии, а затем и теоретической. Расчет теоретической линии регрессии требует решения двух взаимосвязанных задач: выбора и обоснования типа кривой и расчета параметров принятого уравнения. Теоретический выбор типа кривой опирается на экономические зависимости явления и процессов производства, которые подвергаются статистическому

и использовании уравнений нелинейного вида применяют прием «линеаризации» функций.

В случае линейной формы связи результативный признак изменяется под воздействием факторного признака равномерно. Уравнение регрессии имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x, \quad (2.2)$$

Параметры уравнения a_0 и a_1 (коэффициенты регрессии) можно найти из зависимостей:

$$a_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}; \quad (2.3)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}. \quad (2.4)$$

Если связь между признаками нелинейная и с возрастанием факторного признака приходит ускоренное возрастание или убывание результативного признака, то корреляционная зависимость может быть выражена параболой второго порядка:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (2.5)$$

Если результативный признак с увеличением факторного признака возрастает (или убывает) не бесконечно, а стремится к

Для характеристики слабых линейных связей между результативным и факторным признаками применяется степенная функция вида:

$$y_n = a_0 \cdot x^{a_1}. \quad (2)$$

Порядок расчета параметров уравнения (a_0 , b , a_1) приведен в многих учебных пособиях [3, с. 375–381; 5, с. 190–201].

Следующим этапом корреляционного анализа является изучение парной зависимости, т. е. определение и экономическая интерпретация параметров уравнения регрессии.

Первый из показателей уравнения связи a_0 – ордината линии при $X = 0$. Он показывает величину результативного признака, не зависящую от изменения факториального признака. Коэффициент регрессии a_1 говорит, на сколько единиц в среднем для всех наблюдений изменится Y при движении X на одну единицу в пределах установленной наблюдением вариации.

Для экономической интерпретации линейных и нелинейных связей между двумя явлениями удобно пользоваться коэффициентом эластичности:

а) для линейной зависимости:

$$\alpha = a_1 \frac{\bar{x}}{y}; \quad (2)$$

б) степенной зависимости:

$$\alpha = a_1 : \quad (2)$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменится величина Y с изменением величины X на один процент.

Другой не менее важной задачей исследования парной зависимости является измерение тесноты связи, т. е. степени влияния на вариацию признака y .

В качестве измерителя связи используют коэффициент корреляции:

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)(n \sum y^2 - (\sum y)^2)}} \quad (2.11)$$

Коэффициент корреляции служит показателем интенсивности статистической связи, он изменяется в пределах $-1 \leq r \leq 1$; при $r = 1$ связь между признаками прямая и полная, при $r = 0$ – связь отсутствует, при $r = -1$ – связь полная и обратная. При $r = /0,7 - 1/$ – связь присутствует и является сильной, при $r = /0,3 - 0,7/$ – связь присутствует, но слабая, при $r = /0 - 0,3/$ – связь отсутствует или очень слабая.

При определении экономической интерпретации коэффициента корреляции наиболее правильно использовать коэффициент детерминации $d = r^2$, измеряющий ту долю изменения в величинах зависимой переменной, которая может быть объяснена влиянием изменений независимой переменной и концентрироваться в связи с последней.

Таким образом, если $\sum d$ по ряду аргументов больше единицы, то это свидетельствует о том, что связь между признаками

Если результативный признак находится в корреляционной зависимости от многих факторов, то выражающие эту зависимость уравнения называются многофакторными (множественными) корреляционными уравнениями. Такие уравнения рассчитываются сложным образом [5, с. 164–349; 8, 225–249].

Таким образом, при наличии массива ряда показателей желательнее всего проверку меры важности переменных делать по частному коэффициенту корреляции и из числа переменных, имеющих значительную величину, и комплектовать уравнение множественной регрессии.

2.3. Оценка показателей и подготовка массивов данных

Оценку зависимости производят после каждой замены и добавки по коэффициенту множественной корреляции. При этом необходимо добиваться роста по частным *f*-критериям. Это позволяет в ходе работы исключить слабо влияющие показатели и комплектовать уравнения множественной регрессии.

Заключительным этапом корреляционного анализа является оценка уровня значимости найденных параметров.

Точность коэффициента регрессии a_1 оценивается по известному из математической статистики *t*-критерию (критерий Стьюдента):

$$t_{\phi} = \frac{a_1}{\delta_{a_1}}, \quad (2.1)$$

Если $t_\phi > t_\infty$, значение параметра a_1 существенно. Значение t_∞ берется из таблицы заданного уровня значимости, т. е. вероятно-
и $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и числа степеней свободы $\nu = n - 2$.

Полученный из выборки коэффициент корреляции является оценкой коэффициента корреляции r в генеральной совокупности.

Для малого объема выборки (менее 100) с распределением r_{ij} , отличным от нормального, применяются другие методы оценки значимости коэффициента корреляции:

по критерию Стьюдента (t_ϕ):

$$t_\phi = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}, \quad (2.14)$$

где t_ϕ подчиняется закону распределения Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы:

$$|r_{ij}| > \frac{t_\alpha}{\sqrt{t_\alpha^2 + n - 2}}, \quad (2.15)$$

где t_α – значение параметра распределения Стьюдента при заданном уровне значимости и числа степеней свободы $n - 2$ и табл. 2.1.

Для удобства проведения рассмотренных расчетов статистическая информация собирается и заносится в специальные таблицы (табл. 2.2).

Таблица 2

Образец таблицы

Y (наименование показателя)	X ₁ (наименование показателя)	X ₂ (наименование показателя)	...	X _n
--------------------------------	---	---	-----	----------------

Зависимая переменная (Y) набирается из табл. 2.2 в зависимости от результата, который нужно достичь при решении производственной ситуации. Независимые переменные – такие, которые непосредственно связаны с данной ситуацией, т. е. являются активно действующими при решении задачи.

Выбранные массивы данных X_n и массив Y с помощью прикладных программ «Решение задач корреляционного и регрессионного анализа» или статистических функций из Excel проверяются на корреляционную зависимость. Результаты расчета на ПК позволяют:

- получить уравнения регрессии и коэффициентов корреляции, коэффициента детерминации и коэффициента эластичности;
- на основании анализа полученных результатов можно определить наиболее важные показатели, существенно влияющие на работу предприятия;
- на основании отобранных (самых важных) показателей возможно провести уточнение плана организационных

При расчете показателей на ПК с помощью статистических функций из Excel табл. 2.2 расширяется. В нее целесообразно ввести значения Y_2 ; X_1Y_1 ; YX_2 ; X_1^2 ; X_2^2 и т. д. Зависимая переменная Y обычно выбирается с учетом задач анализа: например, при анализе выручки определяется ее связь с рядом показателей; может анализировать численность, фонд заработной платы и другие показатели в зависимости от влияющих на них параметров. Далее приведены примеры различных показателей для подготовки массивов данных.

Массивы могут быть организованы из этих показателей по столбцам, например, строкам: каждый месяц за два–три года или по кварталам за пять лет.

Показатели

Объем реализации услуг	тыс. руб.
Полная себестоимость.....	тыс. руб.
Численность основных рабочих.....	чел.
Численность работающих	чел.
Фонд з/п всего персонала	тыс. руб.
Фонд з/п технологических рабочих	тыс. руб.
Стоимость основных фондов	тыс. руб.

Возможные статьи затрат

Материалы.

Полуфабрикаты и услуги специализированных предприятий.

Заработная плата производственных рабочих основная.

Отчисления.

Расход на содержание и эксплуатацию оборудования

отделения риэлторской фирмы крупного города. Риэлторская фирма имеет 6 отделений и собирается открыть 7 отделение в новом районе. Данные по существующим отделениям приведены в табл. 2.3. Предполагаемый объем договоров нового отделения 115 тыс. руб.

Таблица 2

Данные по объемам фирмы

Отделение	Количество агентов	Объем договоров в М-
I	7	99000
II	12	152000
III	4	81000
IV	5	98000
V	11	145000
VI	9	112000

Принимая количество агентов за независимую переменную, а объем договоров за зависимую, подставляем данные в формулы (2.3) и (2.4) и получаем зависимость:

$$y = 47115,6 + 8423,1 \cdot X . \quad (2.1)$$

Подставляя в эту зависимость определенный объем договоров, получим: при $Y = 115000$ X будет 8,059 агентов, т. е. необходимо иметь 8 сотрудников.

Таким образом, при решении задач производственной хозяйственной деятельности предприятия методами корреляционного анализа могут быть выполнены: исследования показателей уровней специализации предприятия; анализ производителей

робываются различные комбинации измерителей специализации, оценивается влияние каждого из показателей.

Целью является изучение простейших методов использования данных для проведения корреляционного и регрессионного анализа; изучение этих методов для использования регрессионных моделей при прогнозировании экономических явлений; ознакомление с порядком использования прикладных программ Microsoft Excel (раздел функций, математические и статистические функции).

Таким образом, корреляционно-регрессионные методы и модели могут широко и эффективно использоваться в плановых и прогнозных экономических расчетах. Их использование позволяет достаточно точно проследить статистические зависимости на основе имеющихся в наличии массивов статистических данных.

Использование методов корреляции в планово-экономических расчетах позволяет на основе изучения опыта и особенностей предприятия в прошлом строить модели и рассчитывать по ним наиболее вероятные значения, которые должен принести в будущем тот или иной плановый показатель при определенных значениях экономических показателей, принятых за факторы модели [3, с. 216–230; 5, с. 271–349; 8, с. 225–249].

Упражнения и задачи по данной главе представлены в изданиях из библиографического списка [3, с. 384–385, с. 400–401].

Контрольные вопросы

1. При решении каких экономических задач используется

5. Каким образом определяются коэффициенты эластичности?

6. Что показывает коэффициент корреляции?

7. Какие функции характеризуют линейная и нелинейная связи между экономическими параметрами в уравнениях регрессии?

8. Как проверяется значимость уравнения регрессии?

9. Как строится уравнение парной регрессии?

Глава 3. Сетевые методы планирования

Планирование в управлении сложными производственными системами, какими являются современные промышленные предприятия, представляет собой довольно трудную задачу, решение которой традиционными методами не всегда эффективно. Возрастающее разделение труда, усложнение средств производства, количественный рост производственных связей предопределили создание принципиально новых методов, получивших название систем сетевого планирования и управления (СПУ).

3.1. Элементы сетевой модели

Основные элементы **сетевой модели** – это **работа** и **событие**. Работы изображаются стрелками и протекают как трудовой процесс во времени, событие характеризует лишь состояние процесса (момент начала или окончания работ), обозначается кружком и нумеруется.

Путь понимается как непрерывная последовательность работ: путь наибольшей продолжительности в модели называется **критическим**.

Исходные данные для построений сетевой модели выполняются в виде таблицы, где приводятся номер работы, например, 2–5 (т.е. работа соединяет события 2, 5), наименование работы и трудовые затраты на работу (или ее продолжительность).

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать не-



Рис. 3.1. Порядок построения сети

2. При сетевом графике не рекомендуется взаимодействие стрелок. Чтобы избежать этого, допускается смещение событий или вычерчивание стрелок в валиниях (рис. 3.2):

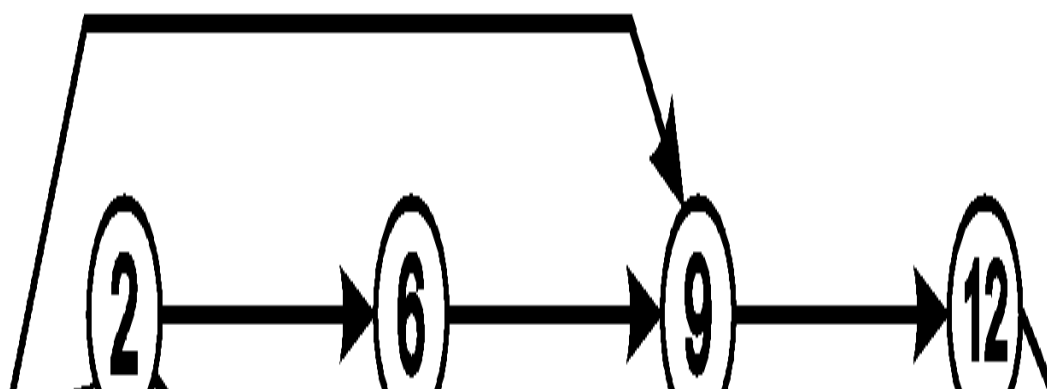


Рис. 3.2. Последовательность работ

3. Между двумя событиями может находиться работа. При изображении параллельных работ не чтобы они имели общее начальное и конечное события изображения вводятся промежуточные события или работы (рис. 3.3), обозначаемые пунктиром и не трат.

4. На сетевом графике не допускается наличия замкнутых контуров или путей, состоящих из работ, направление которых создает замкнутую цепь (рис. 3.4).

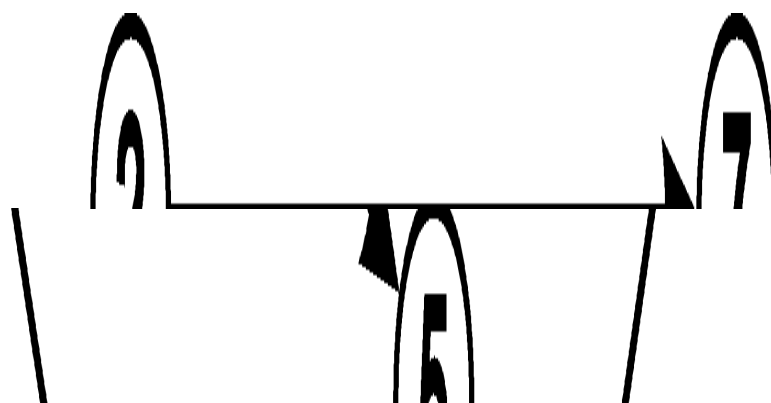


Рис. 3.4. Замкнутая цепь

5. При построении сети нельзя иметь «тупиковых событий», из которых не выходит ни одной работы (тупик I рода) и событий, в которые не входит ни одна работа (тупик II рода) (рис. 3.5).

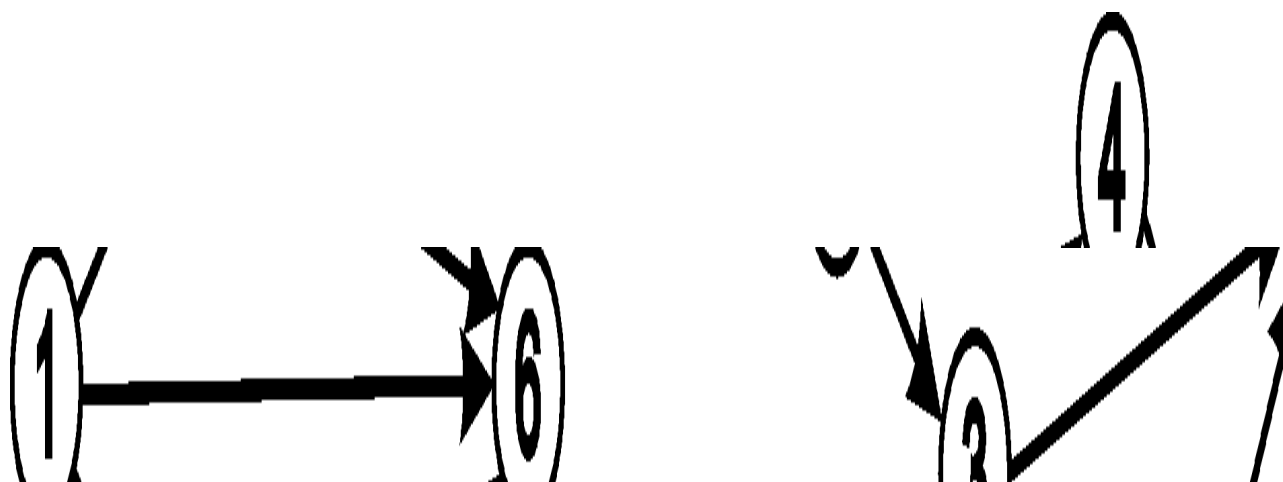


Рис. 3.5. Виды тупиков: а – тупик I рода; б – тупик II рода

6. Продолжительность работы в единицах времени указывается, как правило, над стрелкой, а количество работ, выполняемых одновременно, указывается под стрелкой (рис. 3.6).

Для описания моделей применяется ряд понятий, в том числе следующие параметры модели:

T^P и T^H – раннее и позднее наступление событий;

t_{ij} – продолжительность работы;

t_{ij}^{PH} , t_{ij}^{HH} – раннее и позднее ее начало;

t_{ij}^{PO} , t_{ij}^{HO} – раннее и позднее ее окончание;

r_{ij}^n , r_{ij}^{CB} – полный и свободный резервы работы.

Исходя из принятых обозначений, рассмотрим основные аналитические формулы, необходимые для определения параметров сетевого графика.

1. Раннее начало работы (t_{ij}^{PH}) и раннее окончание работы (t_{ij}^{PO}) можно найти по формулам (расчет ведется слева направо по стрелкам):

$$T_{ij}^{PH} = \max T_i^P ; \quad (3)$$

$$t_{ij}^{PO} = t_{ij}^{HH} + t_{ij} . \quad (3)$$

Если данной работе предшествует несколько работ, то раннее начало равно максимальному значению из всех ранних окончаний предшествующих работ:

$$t_{jk}^{PH} = \max t_{ij}^{PO} . \quad (3)$$

2. Позднее начало работы (t_{ij}^{PH}) и позднее окончание работы (t_{ij}^{PO}) определяются по формулам (расчет ведется справа налево против стрелок, вычитая продолжительность работ из критического пути):

Если за данной работой следует несколько, то ее позднее окончание равно минимальному значению из всех поздних начал следующих работ:

$$t_{ij}^{no} = \min t_{jk}^{nh}. \quad (3.6)$$

3. Полный резерв времени работ r_{ij}^n представляет максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность данной работы или отодвинуть ее начало, не изменив при этом продолжительности критического пути:

$$r_{ij}^n = T_j^n - T_i^p \quad (3.7)$$

или

$$r_{ij}^n = t_{ij}^{no} - t_{ij}^{po}. \quad (3.8)$$

4. Свободный резерв времени r_{ij}^{cb} представляет собой максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы или отодвинуть ее начало, не изменив при этом ранних сроков наступления начального и конечного событий:

$$r_{ij}^{cb} = T_j^p - T_i^p - t_{ij} \quad (3.9)$$

или

$$r_{ij}^{cb} = t_{jk}^{ph} - t_{ij}^{po}, \quad (3.10)$$

где jk – номер последующей работы.

При отсутствии нормативов для расчетов используют оценки экспертов и получается вероятностная сеть, продолжительность выполнения работ которой представлена характеристиками: a_{ii} – оптимисти-

3.2. Табличный расчет модели

Для расчета параметров сетевой модели наиболее используется табличный метод, который позволяет вычислить параметры модели объемом до 500 событий.

Расчет рассмотрим на численном примере.

Сетевой график технической подготовки и женского шитья из синтетических тканей состоит из 9 работ. В сетевом графике показана возможная продолжительность работ в днях (минимальная или максимальная (рис. 3.7)).

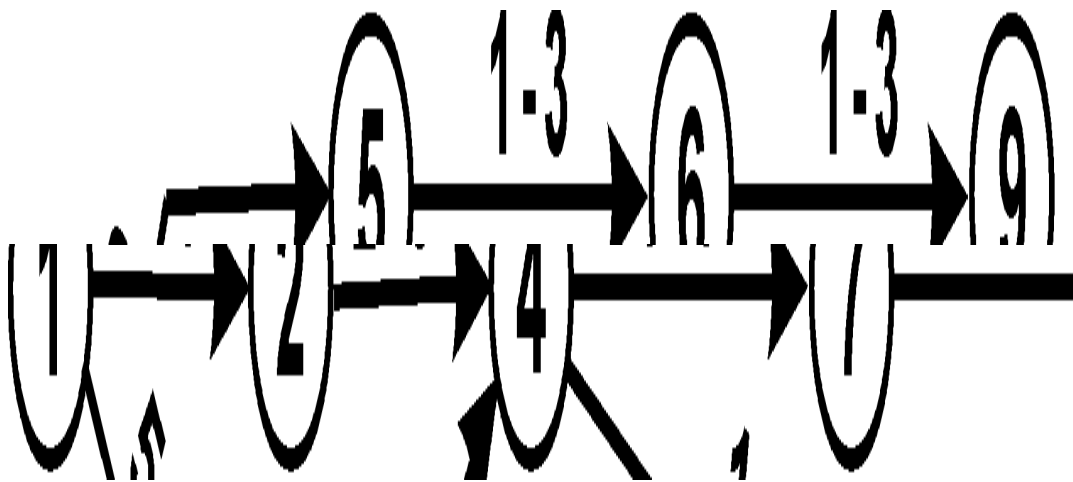


Рис. 3.7. Представление графика с продолжительностью

1. Производим расчет по продолжительности работ по табличному способу, определив сначала математическую продолжительность работ, по формуле:

$$m_{ij} = t_{ij} = (3a_{ij} + 2b_{ij}) / 5 .$$

2. Производим расчет математического ожидания продолжительности работ по формуле:

3. Начинаем расчет параметров сетевой модели с определением раннего начала работы (i, j). Если момент начала работы $T_1 = 0$, то в столбце (t_{ij}^{PH}) записывают $t_{ij}^{PH} = 0$, причем это делают сразу для всех работ, начальным событием которых является событие 1 ($t_{12}^{PH} = 0; t_{13}^{PH} = 0; t_{15}^{PH} = 0$).

Параллельно к расчетам t_{ij}^{PH} определяют значение t_{ij}^{PO} , для чего суммируют только что найденное значение раннего начала работы с ее продолжительностью, записанной в этой же строке.

Так, если $t_{12}^{PH} = 0$, то $t_{12} = t_{12}^{PH} + t_{12} = 0 + 1.8 = 1.8$.

За значение раннего начала каждой следующей работы с начальным событием принимают максимальное значение из всех рассчитанных ранних окончаний непосредственно предшествующих работ, конечным событием которых является j ($j = 1, 2, \dots, n$). (3.3).

Например, для работы 4–5; 4–7; 4–8 ранним началом станет раннее окончание либо работы 2–4, либо работы 3–4:

$$t_{4-5}^{PH} = \max\{t_{2-4}^{PO}; t_{3-4}^{PO}\} = \max\{5,0; 8,6\} = 8,6$$

Наибольшее значение из ранних окончаний работ, конечным событием которых будет завершающее событие сети, определит продолжительность критического пути или $t(L_{кр}) = \max\{t_{in}^{PO}\}$.

Для данного примера $t(L_{кр}) = t_{7-10}^{PO} = 18,6$.

4. Переходим к следующему этапу – расчет t_{ij}^{PH} и t_{ij}^{PO} .

В соответствии с общими правилами принимаем максимальное значение из ранних окончаний работ, входящих в завершающее событие сети в качестве позднего окончания работ с конечными событиями n , т. е. $\max\{t_{in}^{PO}\} = t_{ij}^{PO}$. В данном примере $t_{7-10}^{PO} = 18,6$.

расчет поздних сроков работ проводится в направлении от завершающего события к исходному, т. е. в направлении от непосредственно следующей работы к непосредственно предшествующей, руководствуемся следующими правилами:

- если из события i выходит только одна работа, то поздний срок окончания любой работы с конечным событием $j = i$ равно позднему началу непосредственно следующей работы с начальным событием;

- если из события i выходит несколько работ, то поздний срок окончания любой работы с конечным событием $j = i$ определяется по минимуму рассчитанных значений позднего начала всех непосредственно следующих работ с конечным событием i (рис. 3.6)

Поясним это правило на основе сетевого графика (рис. 3.7). В событие 8 входят 2 работы (3–8 и 4–8), а выходит лишь одна работа (8–10), поэтому $t_{3-8}^{по} = t_{4-8}^{по} = t_{8-10}^{пн} = 11,4$.

Наоборот, в событие 6 входит лишь одна работа (5–6), а выходят две (6–9 и 6–7), отсюда $t_{5-6}^{по} = \min\{t_{6-7}^{пн}; t_{6-9}^{пн}\} = \min\{14, 15,4\} = 14$.

5. Переходим к расчету полного, а затем свободного резерва времени работ.

Полный резерв времени $\delta_{ij}^п$ находят по разности $t_{ij}^{по} - t_{ij}^{пн}$ или по разности $t_{ij}^{пн} - t_{ij}^{рн}$ (гр. 2 = гр. 10 – гр. 8 или гр. 2 = гр. 9 – гр. 7).

Работы, полный резерв времени которых равен 0, будут критическими, а их связная цепочка – критическим путем. В рассматриваемом примере такой путь 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 10.

Свободный резерв времени вычисляют по разности $\delta_{ij}^{св} = t_{ij}^{по} - (t_{ij}^{пн} - 1)$

3.3. Задачи сетевого планирования и управления

Рассмотрим отдельные возможности сетевых моделей. Так, для работ очень удобны сетевые координатные графики, так как они позволяют перераспределить ресурсы с целью оптимизации сетевого графика (рис. 3.8).

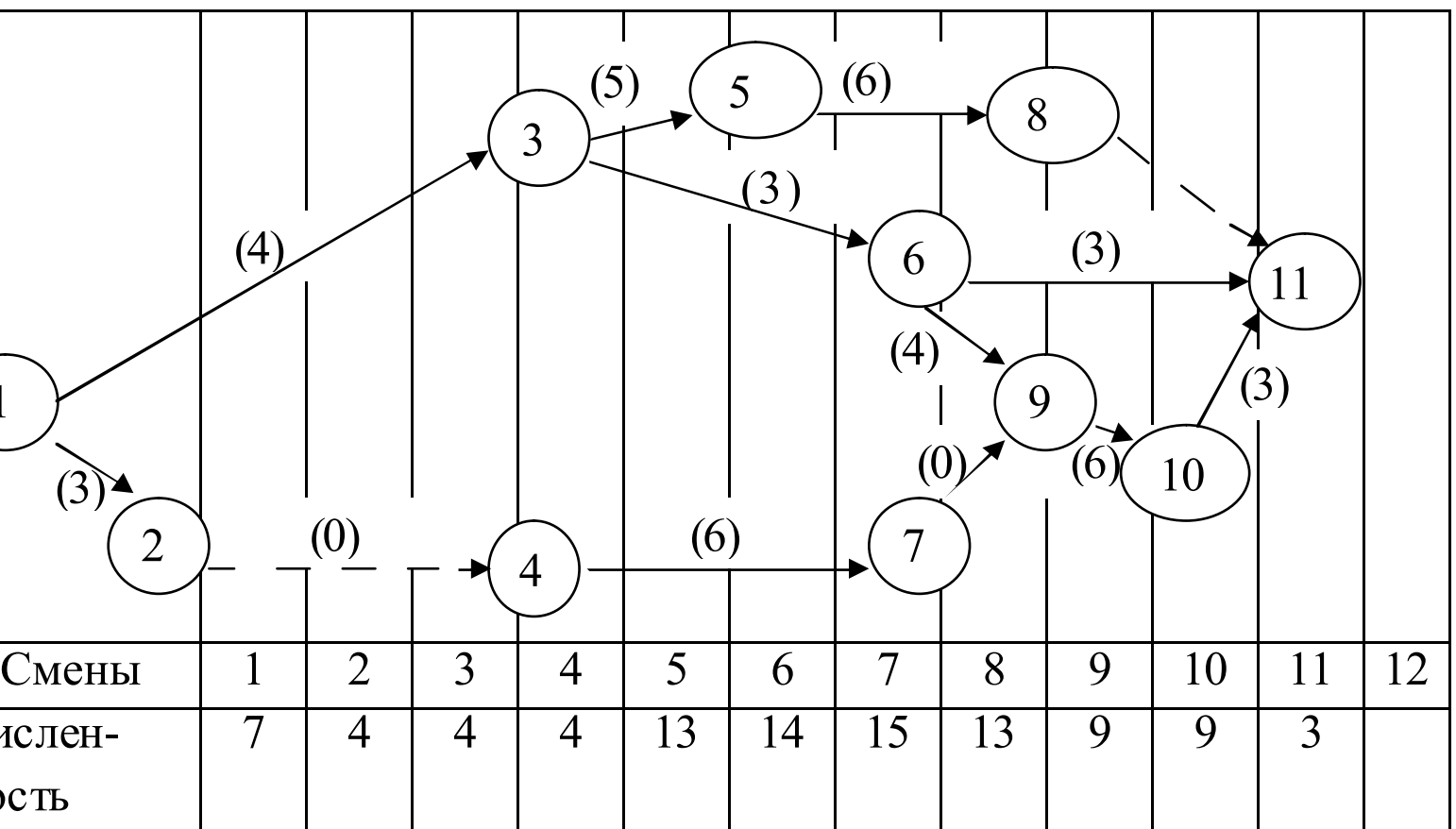


Рис. 3.8. Координатный график

Примечание. Каждое деление в сетевом координатном графике соответствует размерности суток или смен, обозначение под стрелкой в скобках представляет собой численность рабочих, занятых на данных работах. По графику можно определять наличие перерывов (трудовых) по нижней графе (она является итоговой и определяет общую численность работающих в данную смену).

по величине сетевых моделей. Исходя из вышеизложенного, целесообразно применить табличный метод расчета параметров сетевой модели.

Так как табличный метод основывается на использовании аналитических зависимостей определения тех или иных параметров, предварительно рассмотрим эти зависимости и проведем расчет отдельных параметров сетевой модели в нашем примере аналитическим методом.

Для оптимизации обычного сетевого графика необходимо определить критический путь и сосредоточить внимание на работах критического пути. При переносе ресурсов на работы критического пути нужно помнить следующие правила.

- 1) Не оголять другие ветви, чтобы не сделать их критическими.
- 2) Учитывать физические возможности, исходя из которых выполнить быстрее работу критического пути нельзя.

Наиболее полно эти правила реализуются при проведении оптимизации по методу время – стоимость.

Оптимизация сетевого графика по методу время – стоимость производится следующими определенными шагами.

1. После построения сети делают расчет на минимально возможные сроки выполнения работ.

2. Находят резервы времени и критические пути.

3. Если предположить на участке 0–3–4 критический путь (рис. 3.9), то находим на нем работы с минимальной стоимостью C_{ij} (затраты на единицу времени данной работы).

4. Сокращение длительности работ производят с соблюдением условия $\sum \Delta C_k \leq C$, где $\sum \Delta C_k$ – сумма увеличения стоимости работ при каждом шаге (должна быть в пределах ресурса C).

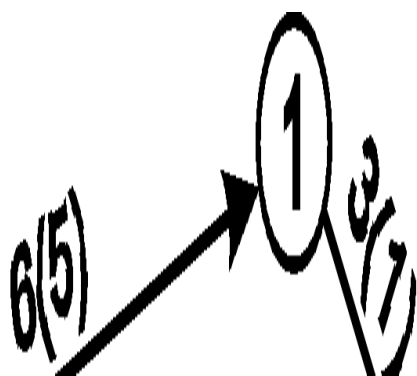


Рис. 3.9. Оптимизация графика

Таким образом, метод время – стоимость позволяет оптимизировать обычные сетевые графики по критериям минимизации сроков выполнения работ и затрат на единицу времени выполнения этих работ.

На основании рассмотренных материалов можно выделить положительные стороны сетевых моделей:

- возможность расчетов (в том числе с ПК);
- руководитель может контролировать критически важные работы;
- план поддается оптимизации.

Методы СПУ стали инструментом планирования в таких комплексных работах, как строительство предприятий, реконструкция, создание новых видов продукции и расширение производства, модернизация технологического оборудования. [1, с. 286–333; 8, с. 277–351]. Упражнения и задачи представлены в изданиях из библиографического списка [2, с. 10–332; 5, с. 6–10].

Контрольные вопросы

6. Раскройте понятие свободного резерва времени.
7. Каково назначение табличного метода?
8. Как определяется понятие полного резерва времени?
9. Каковы основные этапы оптимизации сетевого графика?
10. Определите параметры оценки работ и понятие пути.
11. Что такое критический путь?

Глава 4. Прогнозные модели и экстраполяционные методы

Задачами прогнозирования в большинстве случаев становятся получение количественного или качественного описания одного или ряда необходимых показателей, которые и позволяют конкретизировать намечаемые цели предприятия. Однако не всегда возможно выполнить это по имеющимся данным, и конкретизацию целей приходится выполнять по прогнозам косвенных показателей.

4.1. Организация процесса прогнозирования

Сложным и объемным этапом работ при прогнозировании является сбор необходимых данных. Информационные материалы можно представить как следующие группы наборов данных по направлениям:

- правовые и инструктивные материалы (законы, положения, инструкции и т. п. федерального и местного значения) из внешней среды;
- технико-экономическая информация (данные о продукции, технологии, стоимости и т. п.) из внешней среды;
- рыночная информация (цены, состав продукции, объемы продаж потребности), источник – внешняя среда;
- конъюнктурные данные (спрос, предложение, индексы инфляции и т. п.), источник – внешняя среда;
- первичный учет (обеспечивает данными специализированные системы информации), источник – внутренняя среда;

Среди организованных систематизированных систем выделяются системы финансового и управленческого учета. Эти системы тесно связаны, используют информацию первичного учета, имеют разное назначение и разный состав решаемых задач. Крупным отличием их является и то, что финансовый учет обязателен, управленческий организуется по решению администрации предприятия и имеет самые различные варианты реализации.

Продвижение информации можно представить в виде ряда информационных потоков следующих назначений:

1. Финансово-сбытовая деятельность (в основном информация маркетинга).

1.1. Данные деятельности предприятия и основных конкурентов (объемы продаж, цены, издержки и прибыль, данные о товарах, реклама).

1.2. Анализ рынка (состав потребителей, ценовая политика, деление рынка, свойства потребительских товаров, состояние рекламы).

1.3. Общая социально-экономическая информация (демографическая информация, динамика цен, тенденции в экономике).

2. Снабженческо-заготовительная деятельность (объемы запасов, учет затрат, затраты на хранение, циклы поставок).

3. Учеты производственной деятельности (учет затрат по статьям себестоимости, деление на постоянные, переменные).

4. Учет организационной деятельности (учет по центрам затрат, отчетность об экономических результатах).

5. Бухгалтерская и статистическая отчетность (бухгалтерский баланс, отчет о прибылях и убытках, отчет о движении капитала).

домственные документы, документы законодательства области, кредитные документы).

Перечисленные информационные потоки и информационные массивы используются для решения целого ряда задач прогнозирования. Среди этих задач часто приходится прогнозировать будущие денежные потоки, в первую очередь, – операционные (производственные). Этот прогноз связан с показателями инфляции стоимости различных ресурсов и изменениями цен на продукцию или услуги самого предприятия. Инвестиционные и финансовые денежные потоки предприятия связаны с прогнозами изменений в составе основных фондов, дивидендами и выплатами по ним, операциями с ценными бумагами. Следующая группа задач связана с прогнозированием стоимости имущества предприятия, стоимости самого бизнеса, формированием портфеля ценных бумаг, переоценкой стоимости фондов предприятия.

Важной задачей для предприятий стало прогнозирование ряда показателей для работы службы маркетинга. Среди ранее названных данных важен прогноз показателей конкурентоспособности товаров, показателей будущего состояния рынка, продолжительности жизни товаров и др. Наконец, крупной задачей прогноза по повышению эффективности производства являются прогнозы, связанные с инвестициями. Среди прогнозируемых показателей здесь фигурируют: сроки окупаемости, внутренняя норма доходности, индексы рентабельности и коэффициенты эффективности инвестиций. Таким образом, прогнозирование охватывает самые различные стороны работы предприятия и связано с информацией от целого ряда объ-

4.2. Стоимостные прогнозы

При экономическом прогнозировании наиболее часто исследователя интересуют ценовые, стоимостные прогнозы. Прогнозирование при этом производится наиболее часто в следующих направлениях:

- выбор путей развития (оценка альтернатив);
- изыскание оптимальных путей достижения целей;
- определение необходимых ресурсов и эффективности при реализации определенных решений и деятельности.

Для прогнозирования используются многочисленные методы:

а) приемы сходства и различий, используемые как метод прогнозирования;

б) методы интер- и экстраполяции, методы математической статистики, моделирование, экспертные оценки и др.;

в) адапционные, сетевые, балансовые, программно-целевые методы и др. (группа сложных методов).

Приемы сходства и различий развития экономических процессов широко используются для разных уровней макро- и микроэкономики. Производится сравнение близких по условиям развития объектов, производится описательный анализ сходных и отличающихся факторов, делаются предположения-прогнозы. Подобные приемы не являются определяющими, но позволяют в отдельных случаях предупредить ошибки при использовании других методов прогнозирования, многочисленности аналогов развития событий, делать достаточно серьезные прогнозы.

Сравнительные стоимостные прогнозы используют при крупных разработках типа программно-целевого планирования, а с ними делают обоснование целевых программ для крупных

производительности труда в этой отрасли и зависят от многих факторов: стоимости затрат труда, материалов, энергии; технологичности производства, характеристик изделия.

Пусть себестоимость зависит от ряда параметров:

$$C = a_0 \times \dot{I} x_i^{\lambda_i}, \quad (4.1)$$

где буквы – показатели модели.

Возьмем отношение стоимостей двух образцов изделия:

$$\frac{C_1}{C_2} = \dot{I} \left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}} \right)^{\lambda_i}. \quad (4.2)$$

Тогда, если стоимость одного изделия можно найти по стоимости другого, то:

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 \times \dot{I} \left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}} \right)^{\lambda_i}. \quad (4.3)$$

Часто изделия отличаются только количественными характеристиками, и формулу (4.2) можно представить как интегральный индекс изменения себестоимости:

$$\frac{C_1}{C_2} \times \dot{I} \left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}} \right)^{\lambda_i} = J^{(1,2)}. \quad (4.4)$$

Иногда изделия отличаются только отдельными свойствами, тогда это отношение будет частным индексом.

Пусть изменение стоимости только по одному свойству будет:

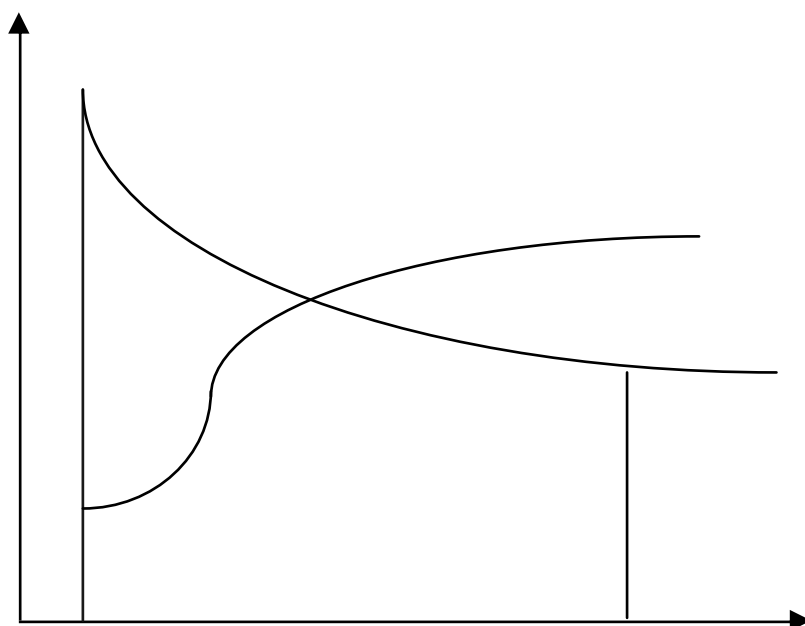
$$\frac{C_{11}}{C_{21}} = J_1, \quad (4.5)$$

Введение интегрального индекса позволяет вывести себестоимость любого изделия, если известна себестоимость одного образца.

Впоследствии приходится учитывать изменение себестоимости изделия в зависимости от освоения производства. Как известно, величина себестоимости зависит от многих факторов: объемов производства, стоимости используемых ресурсов производства и др.

Исследования по отдельным технически сложным объектам показали, что подобную зависимость можно аппроксимировать какой-нибудь типовой криволинейной зависимостью (например, на рис. 4.2). Более широкое использование нашло для многих ценовых и объемных оценок методы цепных индексов. Эти методы используются для прогноза показателей, которые меняются из года в год, но прямой функциональной зависимости между ними нет (например, потребность отрасли в определенных ресурсах).

себестоимость
количество



освоение

развернутый выпуск

Такие показатели, как характер изменения цен, объемы закупок, торговый оборот можно выявить с использованием индивидуальных индексов. Для получения индивидуальных индексов берутся отношения из одного ряда определенных наблюдений: например, отношение цены на нефть 2008 г. к цене на нефть 2003 г. (тонны). В отличие от индивидуальных индексов общие (агрегатные) индексы дают представление о развитии во времени ряда показателей. Часто агрегатные индексы носят название фамилии предложивших их экономистов (например Карли, Маршалла, Лоу, Фишера и др.). Для конструирования индексов требуются определенные данные. Пусть p_{i_0} и p_{i_1} – цена товара i в базовый и текущий период, а q_{i_0} и q_{i_1} – объемы закупок i товара также в базовый и текущий периоды. Тогда индекс Лоу может быть представлен формулой (4.8), где q_i – средние объемы закупок:

$$LW_{01} = \frac{\sum p_{i_1} \times q_i}{\sum p_{i_0} \times q_i}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим пример, по которому данные по закупкам и ценам на яблоки А, груши В, апельсины С сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Исходные данные

Виды фруктов	А		В		С	
	p	q	p	q	p	q

Тогда средние величины будут:

$$q_{i_A} = \frac{20+10}{2} = 15; \quad q_{i_e} = \frac{20+25}{2} = 22,5; \quad q_{i_C} = \frac{10+20}{2} = 15.$$

Индекс Лоу составит:

$$LW_{01} = \frac{15 \times 15 + 10 \times 22,5 + 20 \times 15}{10 \times 15 + 5 \times 22,5 + 12 \times 15} \times 100 = 169.$$

Знание индексов позволяет производить связывание рядов товаров, т. е. в случае, если для одного товара имеются данные годам, а для другого – на смещенные годы. Разобранный пример индекса Лоу дает представление, в основном, по изменениям цен близкие группы товаров, и в случае, если выпадает какой-либо товар, и на него отсутствует информация, индекс позволяет предположить определенное изменение цен (так, в нашем случае 169 %).

Определенные свойства индексов могут облегчить их использование при прогнозировании и расчетах:

1. Связывание. Если для товара имеется два ряда индексов разными базами, то эти ряды можно связать и получить единый ряд, годный для последующего использования. В табл. 4.2 даны исходные данные.

Таблица 4

Исходные данные

Годы	2000	2002	2004	2006	2008
Темп роста, %	100	106	110		
			100	105	108

Аналогично определяется и индекс на 2008 г.:

$$\frac{x}{108} = \frac{110}{100}; \quad \cdot x = I_{2008}^1 = 118,8$$

В результате имеется единый ряд индексов следующего вида (табл. 4.3):

Таблица 4.3

Применение метода «Связывание»

Годы	2000	2002	2004	2006	2008
емп роста, %	100	106	110	115,5	118,8

2. Круговое свойство. Для индивидуальных индексов и для индекса Лоу соблюдается круговое свойство индексов:

$$I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \times I_{34} = I_{04}. \quad (4.9)$$

Как видно из формулы (4.9), произведение индексов можно получить сразу, если использовать базовые и конечные отчетные периоды.

Для перспективного, прогнозного анализа могут быть использованы свойства индексов, позволяющие определить влияние факторов.

Так, определить влияние на реализацию объема или цен можно по формулам.

- Влияние количества:

- Влияние цен:

$$\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_1 \times p_0, \quad (4.1)$$

где p_0, p_1 – старая и новая цена.

- Объединенная формула:

$$\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_0 \times p_0 = (\Sigma q_1 \times p_0 - \Sigma q_0 \times p_0) + (\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_1 \times p_0). \quad (4.1)$$

Часто эта зависимость связывает производительность (выработку) и число работающих с общим объемом. Здесь процесс можно использовать количество:

$$I^N = \frac{\sum D_1 R_1}{\sum D_0 R_0}; \quad (4.1)$$

$$I^N = \frac{\sum D_0 R_1}{\sum D_0 R_0} \cdot \frac{\sum D_1 R_1}{\sum D_1 R_1}; \quad (4.1)$$

$$I^N = I^R \cdot I^D, \quad (4.1)$$

где I^N – общий индекс изменения объема продукции;

I^R – индивидуальный факторный индекс изменения численности;

I^D – факторный индекс изменения производительности труда;

D_0, D_1 – среднегодовая выработка продукции на одного работающего в базисном и отчетном периоде;

R_0, R_1 – среднегодовая численность в базисном и отчетном

По формуле (4.14) можно определить прирост объема за счет изменения численности:

$$\Delta N_R^T = \Sigma D_0 R_1 - \Sigma D_0 R_0. \quad (4.17)$$

Прирост за счет изменения производительности труда можно определить по формуле:

$$\Delta N_D^T = \Sigma D_1 R_1 - \Sigma D_0 R_1. \quad (4.18)$$

Однако теория индексов не дает возможности провести расчет влияния более двух факторов [3, с. 216–230; 5, с. 164–349].

4.3. Экстраполяционные методы

Экстраполяционные методы (или интерполяция) используют, как и многие другие методы, информацию об объекте и среде, но в виде временных рядов.

Временные (динамические) ряды возникают, когда имеется ряд наблюдений за отдельным параметром (параметрами – факторами); каждое из наблюдений может быть поставлено в определенный момент времени на протяжении определенных временных периодов, охватывающих некоторую ретроспективу. Временной ряд полагает установить наиболее типичное в развитии (рис. 4.3).



Временной ряд подвержен влиянию эволюционного, колебательного факторов, а также разовым воздействиям:

а) под влиянием эволюционного характера подразумевает тренд в развитии – долго проявляющиеся основные изменения;

б) под влияниями колебательного характера понимают конъюнктурные и сезонные колебания;

в) к разовым воздействиям можно отнести изменения, вызываемые экологической катастрофой (засуха, дожди) и т. п.

Временной ряд, таким образом, состоит из ряда компонент и подвергается разнообразным воздействиям со стороны как внешних, так и внутренних факторов.

Обычно их делят на компоненты: трендовая (Т), конъюнктурная (К), сезонная (S) и разовое воздействие (Е).

Модель временного ряда может быть представлена зависимостью:

$$y = f (T, K, S, E). \quad (4.1)$$

Различают аддитивную и мультипликативную модели временного ряда. Первая отличается тем, что характер циклических и сезонных изменений остается постоянным; вторая – тем, что характер изменений остается постоянным только по отношению к тренду (но может, например, меняться по величине).

Поскольку временной ряд имеет один или несколько показателей во времени, то он будет двумерным распределением, которое можно представить таблицей данных.

Характеристиками двумерного распределения временного ряда будут:

а) средние значения

дисперсия

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \bar{x} \right)^2 ; \quad (4.22)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(y_j - \bar{y} \right)^2 ; \quad (4.23)$$

временной ряд может быть представлен зависимостью:

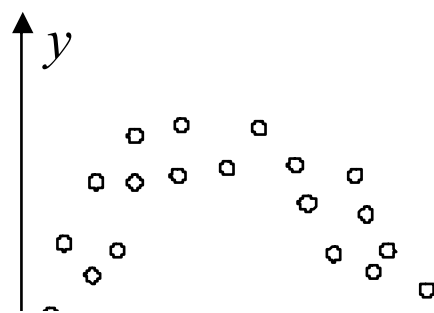
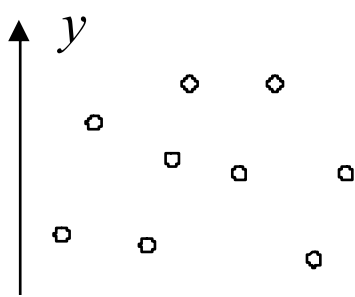
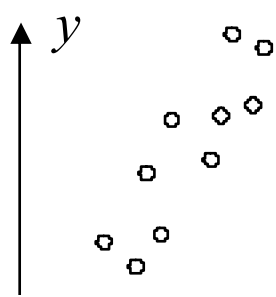
$$y_t = x_t + \varepsilon_t , \quad (4.24)$$

где x_t – детерминированная составляющая (Т), а ε_t отражает случайные составляющие (К, S, E).

Первым этапом экстраполяции тренда на базе набранной информации и построенного временного ряда является выбор оптимального вида функции, описывающей эмпирический ряд.

Предварительную оценку наличия связи между параметрами может дать **поле корреляции** (графики, отражающие связь между показателями, рис. 4.4, 4.5, 4.6).

Графики позволяют предположить о наличии тесной или слабой связи, линейной или нелинейной.



Более полное представление дает табл. 4.4.

Таблица 4

Корреляционная таблица

	88–340	340–592	592–844	Итого
X				
Y				
103–303	9	1		10
303–503	2	1		3
503–703			2	2
Итого	11	2	2	15

Может быть концентрация точек (так называемых частот) в круг диагонали, что показывает наличие обратной связи. Частоты могут быть сконцентрированы вдоль противоположной диагонали (как в данном случае) – это прямая связь (рис 4.4.). Если точки (частоты) разбросаны, то связь отсутствует (слабая) (рис 4.5).

Как уже отмечалось ранее, на временной ряд оказывают влияние случайные составляющие, и важной задачей является выявление основного влияния – тренда. **Тренд** – это долговременные составляющие временного ряда. Определение трендовых компоненты можно проводить рядом методов, и самый простой – это метод «на глаз»:

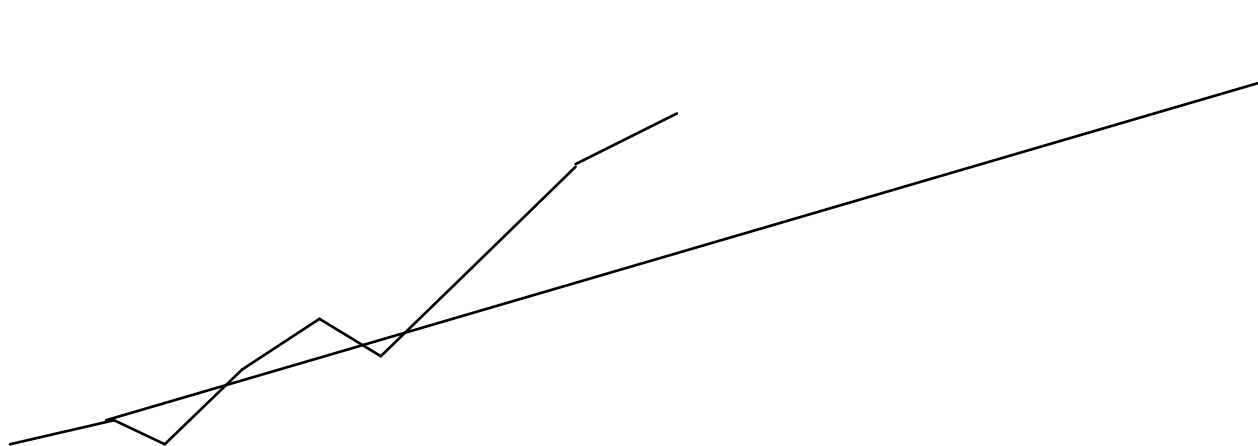
а) простейший визуальный метод. Строится поле корреляции, очертив его, пытаются провести линию тренда; в этом случае линия тренда покажет основное направление изменения статистической зависимости;

б) метод скользящих усреднений. Суть метода состоит в то

Таблица 4.5

Данные по обороту фирмы (ФРГ)

Торговый оборот		T_i – значение тренда	Годы
t	y_i		
1996	2		
1997	3	$\frac{2+3+2}{3} = 2\frac{1}{2}$	1997
1998	2	$\frac{3+2+5}{3} = 3\frac{1}{3}$	1998
1999	5	$\frac{2+5+6}{3} = 4\frac{1}{3}$	1999
2000	6	$\frac{5+6+5}{3} = 5\frac{1}{3}$	2000
2001	5	$\frac{6+5+8}{3} = 6\frac{1}{3}$	2001
2002	8	$\frac{5+8+9}{3} = 7\frac{1}{3}$	2002
2003	9	$\frac{8+9+11}{3} = 9\frac{1}{3}$	2003
2004	11		



в) метод усреднения по левой и правой половине. При этом методе делят временной ряд на две части, строят для каждой из них среднее арифметическое и проводят через построенные точки линию тренда.

г) метод экспоненциального сглаживания. Методы сглаживания разделяются на две основные группы:

- сглаживание или механическое выравнивание уровней временного ряда с использованием фактических значений других уровней ряда;

- выравнивание с применением кривой, проведенной между конкретными уровнями временного ряда таким образом, чтобы она отображала тенденцию, присущую ряду, и одновременно освобождала его от незначительных колебаний.

Применение кривых предполагает существование некоторой закономерности на протяжении некоторого периода предыстории (к применению кривых мы вернемся несколько позднее).

Суть методов механического сглаживания заключается в следующем: берутся несколько первых членов ряда, образующих так называемый интервал сглаживания. Для них подбирается кривая, аналитическим выражением которой служит полином, степень которого должна быть меньше числа уровней, образующих интервал сглаживания. С помощью полинома определяется новое выровненное значение члена, находящегося в середине интервала сглаживания. Далее интервал сглаживания сдвигается на один член вправо, вычисляется следующее выровненное значение ряда, вновь производится сдвиг, вычисление и т. д. В соответствии с этой схемой реализуются методы простой и взвешенной скользящей средней, а также их разновидности.

оценка о наличии существования тенденции крайне важна. Существующие численные методы определения наличия тенденции различаются друг от друга по сложности вычислений, универсальности, возможностям использования ПК для автоматизации расчета и т. д.

Один из простых методов проверки временного ряда на тренд – знаковый критерий тренда Кокса и Стюарта:

- исходный временной ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ делят на три группы так, чтобы первая и последняя треть содержали одинаковое число уровней $n = n/3$. Если n на три не делится, то средняя треть уменьшается на одно или два наблюдения;

- каждое наблюдение первой трети ряда сравнивается с соответствующим наблюдением последней трети ряда и фиксируется знаком плюс при убывающем тренде, минус – при возрастающем тренде, в зависимости от знака разности. Сумму знаков «плюс» или «минус» обозначаем через S ;

- вычисляем величину Z , которая подчиняется нормальному закону распределения со стандартным отклонением $\sqrt{n/12}$ по одной из следующих формул:

$$\hat{Z} = \frac{(S - n/6)}{\sqrt{n/12}}, \text{ при } n \geq 30, \quad (4.25)$$

$$\hat{Z} = \frac{(S - n/6) - 0,5}{\sqrt{n/12}}, \text{ при } n < 30, \quad (4.26)$$

где n – число уровней исходного временного ряда;

Пример:

За ряд лет в стране были следующие показатели по урожаю (ц с га): 9,5; 13,7; 12,1; 14,0; 13,2; 15,6; 15,4; 14,0; 17,6; 15,4; 10,9; 17,5; 15,0.

Таблица 4

Результаты расчета

Значения первой трети	9,5	13,7	12,1	14,0	13,2
Значения последней трети	17,6	15,4	10,9	17,5	15,0
Знаки разностей	–	–	+	–	–

Мы получили четыре отрицательных знака из пяти, $S = 4$. Проверка на возрастающий тренд дает:

$$\hat{Z} = \frac{\left(4 - \frac{13}{6}\right) - 0,5}{\sqrt{\frac{13}{12}}} = 1,282 .$$

То есть это возрастающий тренд при установленном 10% уровне погрешности.

Этот наиболее известный метод в упрощенном виде использован в методе б. Идея метода сглаживания – производить расчет тренда с учетом ретроспективных данных на интервал упреждения, а использование прошлых данных уменьшать. При этом более поздним наблюдениям присваивается больший вес, чем ранним. Вес наблюдений убывает по экспоненте.

Для нахождения экспоненциальной средней применяют рекуррентную формулу, где и используется параметр α для сглаживания

д) метод наименьших квадратов. При этом методе линию тренда подгоняют к наблюдаемым значениям таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной.

Выражение $\sum (x_i - \bar{x})^2$ характеризуется как сумма квадратов отклонений. Если мы можем считать тренд линейным, то в качестве модели для y можно полагать $y = a + bt$ и для любой точки должна соблюдаться зависимость:

$$\sum (\ell_i)^2 = \sum (y_i - a - bt_i)^2 = \min, \quad (4.28)$$

где ℓ_i — расстояние, от точки i до прямой (рис. 4.8):

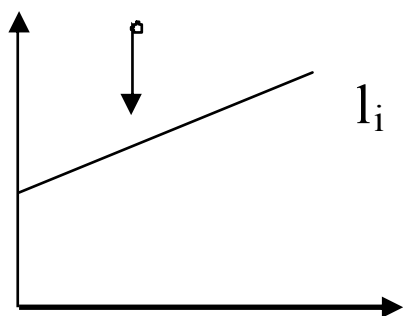


Рис. 4.8. Место нахождения искомой точки

Для a и b существуют формулы:

$$a = \bar{y} - b\bar{t}; \quad (4.29)$$

$$b = \frac{\sum_{t=1}^n (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})}{\sum_{t=1}^n (t_i - \bar{t})^2}. \quad (4.30)$$

Если мы рассмотрим таблицу значений многоугольником шестой строки

Использование перечисленных методов отображено на рис. 4.11

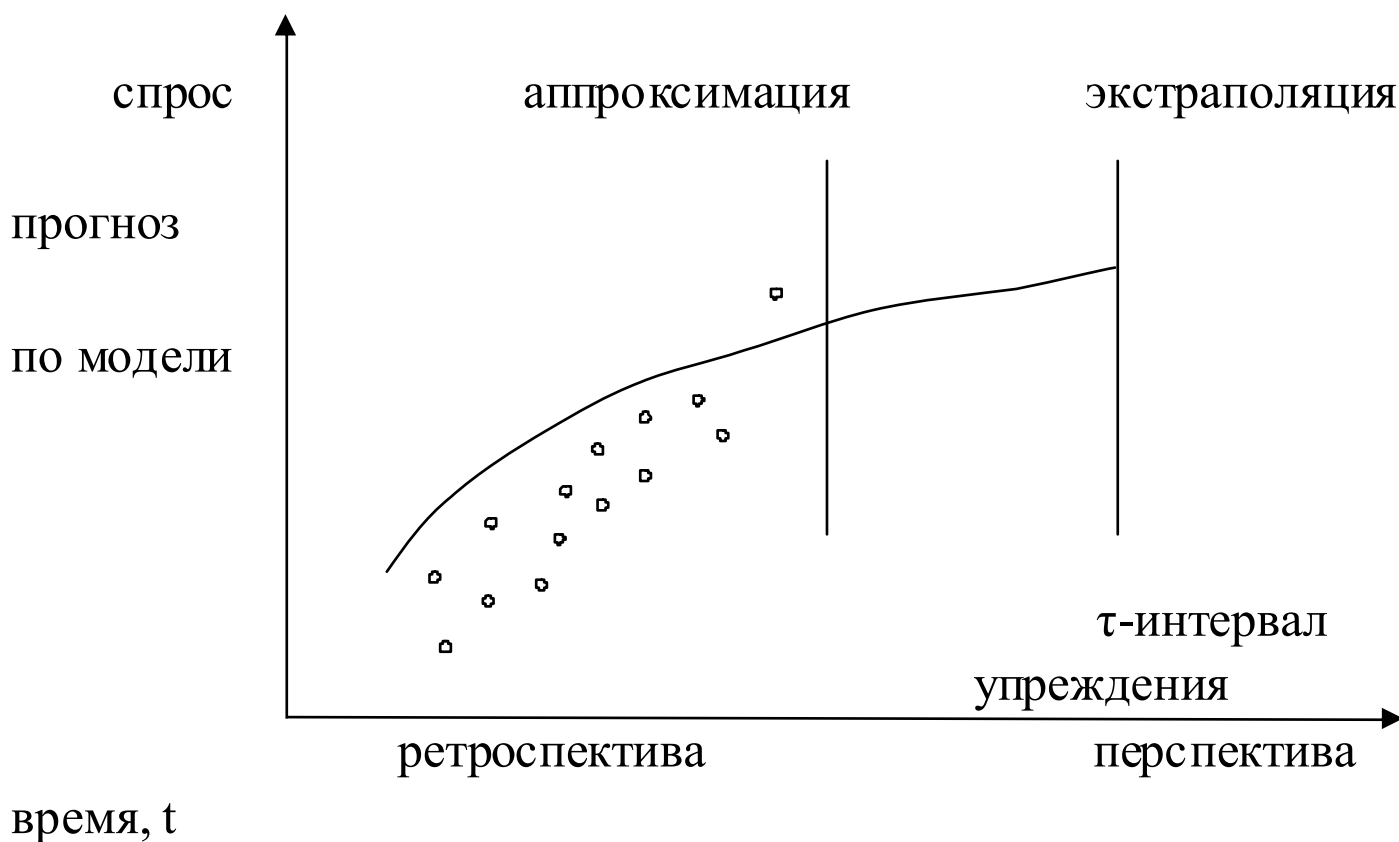


Рис. 4.11. Применение перечисленных методов

Конечными целями прогноза для предприятия может быть большой их перечень, включающий повышение прибыльности, расширение рынка сбыта, рост объемов производства, сокращение издержек производства, повышение оборачиваемости капиталов, организация инвестиций, совершенствование организационной структуры, улучшение состава стоимости имущества и другое. Для достижения всех этих целей, в смысле прогнозирования, необходимо использовать перечисленные выше методы, устанавливающие трендовую составляющую. Эти методы используют временные ряды и различные статистические критерии из математической статистики [3, с. 21].

Контрольные вопросы

1. Дайте определение прогнозирования.
2. Определите характеристику видов прогноза.
3. Какова общая схема методов прогнозирования?
4. Сформулируйте основные этапы прогнозирования.
5. Какова цель классификации объектов прогнозирования?
6. Какова классификация объектов прогнозирования по их масштабам?
7. В чем состоит содержание метода экстраполяции?
8. Дайте понятие метода экстраполяционного сглаживания.
9. Определите понятие метода адаптивного сглаживания.
10. В чем состоит суть метода наименьших квадратов?

Глава 5. Другие экономико-математические методы и модели

Под имитационным моделированием понимают построение модели реального объекта и постановку на этой модели с целью оценки стратегий, с которыми лучше всего функционирует модель и объект.

При принятии самых различных оценок и решений использовались методы экспертных оценок. Их использование связано с тем, что во многих случаях трудно установить достаточно полное значение с факторов объектов, тем более что ряд факторов имеет разную и иную оценку. Это стало особенно важно в условиях неопределенности и резких изменений в экономике.

5.1. Понятие об имитационной модели

Рассмотрим структуру имитационной модели на примере человеко-машинной системы.

Среди имитационных моделей наибольший интерес представляют человеко-машинные модели. Имитационные модели позволяют получить численные результаты (по существу имитационное моделирование представляет исследовательский процесс).



На рисунке предусмотрено участие лица, принимающего решения (ЛПР) или группы специалистов, но ряд задач решают машины, пользуясь имеющимися банками данных, информацией проблемных модулей, стандартных модулей, для извлечения нужной информации используется информационно-поисковая система, в более упрощенных случаях частичную роль этих банков играет и сам человек. В частности, при деловой игре (безмашинный вариант) операции всех банков берет на себя ЛПР или группа специалистов. Блок модулей позволит использовать типовые модели объектов для данного моделирования и типовые алгоритмы методов расчета.

Как показывает опыт, имитационное моделирование имеет большое значение и перспективы при использовании в управлении экономическими объектами при подготовке решений; этим значительно снижаются затраты на проверку различных вариантов функционирования или решения, которые иногда вообще нельзя проверить по ряду причин (в том числе из-за значительных ущербов) осуществить. Большие возможности у имитационных методов и в обучении. При разработке моделей этой группы приходится учитывать следующее:

- модель должна иметь четко сформулированную цель функционирования;
- быть понятной и удобной для использования (в том числе для модернизации) и подготовки программы для ПК;
- при реализации должна давать численные результаты.

При моделировании используют для изменения переменных параметров датчик случайных чисел; моделирование параметров времени с определенным шагом «по Δt »; моделирование пара-

В сфере сервиса можно рассчитывать на успешное использование имитационных методов для процессов расчета объема реализации отдельных участков и цехов, а также предприятий в зависимости от изменения тех или иных показателей (как база и используется матрица данных по рабочим местам и их объема реализации). Возможно использование этих методов для оценки роли материального стимулирования со сравнительно небольшим числом участвующих параметров (всего около 20) [1, с. 245–273, с. 402–430].

5.2. Методы экспертных оценок

Методы экспертных оценок достаточно сложны, но обычно порядок их использования следующий:

1. Формулирование задачи.
2. Формирование экспертной группы.
3. Разработки процедуры опроса.
4. Выбор методов обработки данных.
5. Проведение нескольких туров опросов экспертов.
6. Обработка полученных данных.
7. Оценка надежности результатов, их анализ и использование.

Число экспертов обычно берется близким к числу рассматриваемых событий объектов, учитывается специальность, квалификация экспертов.

Опрос обычно сводится к ответу «да» и «нет». Среди приемов оценки предпочтительности опрос чаще всего делается с использованием ранжирования объектов. Эксперт, используя свои знания, опыт, а иногда и интуицию, располагает объекты в порядке

е. для равноценных объектов назначают одинаковые ранги, которые определяются как среднеарифметические, так:

$$r_4 = r_5 = \frac{4 + 5}{2} = 4,5 .$$

При групповой оценке каждый эксперт (до m) присваивает объекту j (до n) ранг r_{ij} .

Для оценки согласованности мнений экспертов применяются следующие показатели:

1. Коэффициент конкордации, который позволяет судить о согласованности мнений в группе (W меняется от 0 до 1):

$$W = \frac{D}{D_{\max}} , \quad (5.1)$$

есть отношение оценки дисперсии к максимальному ее значению.

$$D_{\max} = \frac{m(n^3 - n)}{12(n-1)} , \quad (5.2)$$

де $D = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (r_{ij} - \bar{r})^2 \right) \right] . \quad (5.3)$

При $W = 0$ согласованности мнений нет, если $W = 1$ (полная согласованность), возникает подозрение в необъективности экс-

2. Коэффициенты ранговой корреляции (чаще всего коэффициент Спирмена ρ):

$$\rho = \frac{\mathbf{K}_{12}}{\sqrt{\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2}}, \quad (5.4)$$

где

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{1i} - \bar{r}_1)(r_{2i} - \bar{r}_2); \quad (5.5)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{ij} - \bar{r}_1)^2, \quad (5.6)$$

аналогично рассчитывается \mathbf{D}_2 .

Коэффициент Спирмена меняется от -1 до $+1$, оценка производится по критерию Стьюдента. Коэффициент позволяет оценить совпадение мнений отдельных экспертов.

После проверки высказываний экспертов (а при обработке ПК и одновременно) делается расчет обобщенных рангов:

$$r_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} k_j, \quad (5.7)$$

где k_j – коэффициенты компетентности, рассчитываемые по ркуррентным формулам.

Таблица 5.1

Фрагмент оценки мероприятий

Наименование мероприятия	Ранги 1 эксперимента	Ранги 2 эксперимента	Ранги 3 эксперимента	Обобщенные ранги (ПК)
Установка нового оборудования	6	8	10	8,5
Оснащение рабочих мест	1	2	3	1,5
Улучшение нормирования работ	2	3	1	1,5
Организация овладения смежной профессией	11	9	8	10

Как показали результаты расчета, первый и второй ранги выделили 2 и 3 мероприятия. Коэффициент конкордации $W = 0,6$, значимость подтверждена $\% = 25,1 > 17,3$ табличной.

Коэффициент Спирмена: 0,79; 0,94; 0,87.

В заключение следует отметить, что имитационное моделирование позволяет решить широкий круг задач управления и планирования с достаточными для практики результатами. Наиболее перспективными моделями при этом можно считать человеко-машинные системы, которые позволяют модернизировать модели в процессе диалога с ПК с достижением достаточных для практического использования по результативности и эффективности технико-экономических показателей.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение экспертной оценки.
2. Сформулируйте основные требования к экспертной оценке.
3. Перечислите основные проблемы экспертной оценки.
4. Каковы основные методы экспертных оценок?
5. Что понимается под имитационным моделированием?
6. Определите структуру имитационного моделирования.
7. Для каких целей используются имитационные модели?
8. Какие параметры характеризуют имитационное моделирование?
9. Каково назначение коэффициентов ранговой конкордации?
10. Определите порядок использования методов экспертных оценок.

Заключение

Следует отметить, что любая математическая модель является лишь упрощенным вариантом формализованного представления реального объекта, явления или процесса. Искусство исследователя состоит в том, чтобы построить такую модель, которая с достаточной адекватностью описывала бы все те стороны моделируемой реальности, которые интересуют исследователя, а следовательно, ей будет соответствовать вероятностный прогноз. Количество связей в выбранной модели должно зависеть от условий, при которых эта модель конструируется, от подробности объяснения, к которой стремится исследователь. В пособии представлены системы статистических уравнений, которые в настоящее время широко используются для описания и для исследования, а также моделирования и прогнозирования экономических процессов и явлений на микроуровне (модели поведения потребителей, фирм, предприятий).

В целом изложенный материал является первой ступенькой в профессиональной подготовке экономиста-аналитика, то есть относится к необходимому минимуму. Поэтому рекомендуется изучать и специальную литературу, которая поможет стать квалифицированным специалистом в области экономико-тематического моделирования.

Библиографический список

1. Исследование операций в экономике / под ред. Н. Ш. Крамера М. : ЮНИТИ, 2009. – 407 с.
2. Глухов, В. В. Математические методы и модели менеджмента / В. В. Глухов [и др.]. – СПб. : Лань, 2008. – 479 с.
3. Красс, М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М. – СПб. : ПИТЕР, 2008. – 464 с.
4. Морозов, Ю. В. Основы высшей математики и статистики / Ю. В. Морозов. – М. : Высшая школа, 2008. – 316 с.
5. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование / И. В. Орлова, В. А. Половников. – М. : ИНФРА-М, 2010. – 365 с.
6. Солодовников, А. С. Математика в экономике / А. С. Солодовников. – М. : Финансы и статистика, 2009. – 397 с.
7. Фомин, Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2009. – 615 с.
8. Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. В. В. Федосеева – М. : ЮНИТИ, 2009. – 302 с.

ЗАДАЧИ

Методические указания к решению задач смотрите в содержании главы 3 данного учебного пособия.

Задача 1.1. Сделать деревянный ящик (работу выполняет один человек). Разместить доски в соответствии с размерами ящика (15 мин.); разрезать доски (12 мин.); склеить части ящика (40 мин.); прибить к крышке ящика петли (8 мин.); подождать, пока ящик высохнет, и вытереть его (15 мин.); петли (с крышкой) прибить к ящику (10 мин.).

Построить сетевой график.

Найти продолжительность выполнения комплекса работ, временные характеристики событий и работ. В скобках указана продолжительность работ.

Задача 1.2. Заменить колесо машины (работу выполняют два человека). Достать из багажника домкрат и инструменты (40 с.); снять диск с колеса (30 с.); освободить колесо (50 с.); поставить домкрат под машину (26 с.); поднять машину (20 с.); из багажника взять запасное колесо (25 с.); снять гайки и колесо (20 с.); установить запасное колесо на ось (10 с.); завинтить (несильно) гайки на оси (15 с.); опустить машину и собрать домкрат (25 с.); поставить домкрат обратно в багажник (10 с.); завинтить гайки на оси до конца (12 с.); положить пломбу на колесо и инструменты в багажник (40 с.); поставить на место диск колеса (10 с.).

Найти продолжительность выполнения комплекса работ, временные характеристики событий и работ. В скобках указана продолжительность работ.

Задача 1.3. В табл. 1.1 указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

Таблица

Исходные данные для решения задачи

№ п/п	Работа (i,j)	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		оптимистическая $t_0(i, j)$	пессимистическая $t_{п}(i, j)$	наиболее вероятная $t_{НВ}(i, j)$
1	(1,2)	5	9	6
2	(1,3)	2	7	5
3	(1,4)	4	10	8
4	(3,4)	9	14	11
5	(2,5)	7	13	10
6	(4,5)	1	4	3

Необходимо: а) построить сетевой график; б) определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ; в) определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти: а) вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 17 суток; б) максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95.

Задача 1.4. По данным табл. 1.2 необходимо: 1) построить сетевой график; 2) определить критический путь и стоимость проекта при минимально возможных значениях продолжительности всех работ; 3) найти минимальную стоимость проекта при том же сроке его завершения; 4) рассчитать и построить оптимальную зависимость проекта от продолжительности его выполнения, позволяющую в качестве первоначального варианта

Исходные данные для решения задачи

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки		Коэффициент затрат на ускорение работы
	min	max	min	max	
(1,2)	4	5	2	15	5
(1,3)	4	3	2	11	4
(1,4)	12	150	9	180	10
(2,3)	6	11	5	30	19
(2,4)	7	18	6	30	12
(3,4)	10	10	8	20	5
(3,5)	24	147	19	212	13
(4,5)	10	4	7	25	7
(5,6)	3	2	2	5	3

МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ (ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Методические указания к изучению темы

Схема исследования типичной проблемы (задачи ЛП) может состоять из следующих этапов.

1. Уяснение смысла проблемы (задачи ЛП) и содержательная формулировка задачи.
2. Построение математической модели (задачи ЛП).
3. Поиск оптимального решения (использование алгоритма решения задачи ЛП, заложенного в Excel, оболочка «Поиск решения») [5].
4. Выдача рекомендаций лицу, принимающему управленческое решение (УР), или корректировка исходной модели (смотрите главу 1 данного учебного пособия).

Основными и наиболее трудными этапами являются:

- умение строить математические модели ЛП, как можно более адекватные реальным проблемам;
- анализ решения математических моделей ЛП оптимизационного типа.

Методические указания к разработке моделей задач ЛП

Постановка задачи ЛП в виде математической модели [1, 5, 7, 8].

Задача линейного программирования (ЛП) заключается в отыскании вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, минимизирующего (максимизирующего) линейной целевую функцию

$$L = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad (2.1)$$

переменные которой подчинены линейным ограничениям

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \quad (2.2)$$

$$a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n \leq b_s,$$

Задача (2.1) – (2.5) называется задачей ЛП в произвольной форме записи.

Точка (вектор) $x = (x_1, \dots, x_n)$, координаты которой удовлетворяют условиям (2.2) – (2.5), называется допустимым решением (точкой, вектором) задачи ЛП или планом.

Множество допустимых решений называется областью определения (допустимой областью) задачи ЛП.

Допустимое решение, на котором целевая функция (2.1) обращается в минимум (максимум), называется оптимальным решением (оптимальным планом).

Для использования стандартных вычислительных алгоритмов ЛП в Excel (оболочка «Поиск решения») требуется математическая запись модели.

Таким образом, необходимо умение переводить словесное описание задачи на язык математических символов. Составление математической модели начинают с выбора переменных, совокупность числовых значений которых однозначно определяет один из вариантов процесса. Следует иметь в виду, что иногда от удачного выбора этих переменных зависит простота модели и, следовательно, удобство дальнейшего ее анализа.

После выбора переменных необходимо составить ограничения по тексту задачи, которым эти переменные должны удовлетворять. При этом можно следить, чтобы в модель были включены все ограничительные условия и в то же время не было ни одного лишнего или записанного в более простой, чем требуется условиями задачи, форме.

В заключение составляется целевая функция, которая в математической форме отражает критерий выбора лучшего варианта.

После составления математической модели необходимо рассмотреть возможные пути ее упрощения и использовать вычислительный метод для решения задачи ЛП в Excel (оболочка «Поиск решения»).

Рассмотрим пример задачи ЛП – задачу о диете.

При имеющемся наборе N продуктов известной стоимости необходимо составить дневной рацион так, чтобы обеспечить заданное содержание белков, жиров и углеводов при минимальной суммарной цене продуктов.

1. Выберем переменные данной задачи:

x_1, x_2, \dots, x_N – количество продуктов, входящих в рацион.

2. Составим ограничения, которые по условиям задачи должны обеспечить содержание белков, жиров и углеводов в количествах b_1, b_2, b_3 соответственно.

Так как в единице i -го продукта содержится a_{i1} единиц белков, то в x_i единицах i -го продукта содержится $a_{i1}x_i$ единиц белков. Значит, общее количество белков в рационе будет равно сумме $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{N1}x_N$, а условие – неравенство для белков будет иметь вид:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{N1}x_N \geq b_1.$$

Записывая аналогичные условия для жиров и углеводов, получим, включая предыдущие, три условия:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{N1}x_N \geq b_1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{N2}x_N \geq b_2;$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \dots + a_{N3}x_N \geq b_3.$$

Нельзя забывать вытекающие из условия задач ограничения: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$. Эти ограничения означают, что отрицательное количество продукта x_i не имеет содержательного смысла.

3. Составим целевую функцию. Общая цена рациона равна

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N,$$

и линейную функцию L необходимо минимизировать.

Итак, математическая модель рассмотренной задачи о диете имеет вид минимизировать $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N$, при условиях

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{N1}x_N \geq b_1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{N2}x_N \geq b_2;$$

Задачи, требующие построения математических моделей ЛП, адекватных реальным проблемам

После построения модели для каждой из задач введите модель в ПК и изучите оптимальное решение. Проведите анализ этого решения и сделайте окончательный вывод о его приемлемости для лица, принимающего решение [2, 5, 7, 8]. В ссылках на учебные издания указываются их номера в библиографическом списке данного учебного пособия.

Задача 2.1. Каждая из деталей А и В должна пройти обработку на каком-либо из трех станков. Затраты времени на обработку одной детали и максимальное допустимое время работы каждого из станков заданы в нижеприведенной табл. 2.1.

Таблица 2.1

Станки	Норма времени на обработку детали, час.		Время работы станка, час.
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Деталей А требуется произвести не менее 300, деталей В – не более 200. Прибыль при реализации детали А составляет 10 руб., детали В – 16 руб. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль.

Задача 2.2. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры выполняются заготовки трех типов А, В, С. Используются два способа раскроя листа. Количество получаемых из одного листа заготовок и отходы для каждого способа раскроя, а также минимальная потребность в заготовках заданы в табл. 2.2. [7, 8].

Таблица 2.2

Как получить необходимое количество заготовок типов А, В, С с минимальными отходами?

Задача 2.3. При разведении лисиц и песцов на звероферме используются три вида кормов. Расходы кормов на одно животное, запасы кормов и прибыль от реализации одной шкурки заданы в табл. 2.3.

Таблица

Вид корма	Запасы кормов	Потребность в корме на одно животное	
		Лисица	Песец
1	180	2	3
II	240	4	1
III	426	6	7
Прибыль		16	12

Сколько лисиц и песцов надо содержать на ферме для получения максимальной прибыли?

Задача 2.4. В суточный рацион включаются два продукта питания P_1 и P_2 , причем продукта P_1 не более 200 единиц. Содержание витаминов А и В в единице каждого из продуктов, минимальная суточная потребность в витаминах и стоимость единицы каждого продукта заданы в табл. 2.4.

Таблица

Витамины	Минимальная потребность в витамине	Содержание витамина в единице продукта	
		P_1	P_2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2
Цена единицы продукта		2	4

д кормовые культуры должно быть занято не менее 100 га пашни, а до-
ды от 1 ц зерновых и 1 ц кормовых культур совпадают.

Задача 2.6. Для производства двух видов изделий А и В предприятие
использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее ко- личество сырья, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
прибыль от реали- зации одного из- делия, ден. ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль
предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии,
что изделий В надо выпустить не менее, чем изделий А.

Задача 2.7. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов
кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит 1 ед. жиров,
2 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10
ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жи-
вотным не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитра-
тов не более 16 ед.

Задача 2.8. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех
типов. Другие условия задачи приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

Задача 2.9. Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 м и 3 м; при этом получится равное количество брусков каждого размера.

Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилены (в один комплект входит по одному бруску каждого размера) [7, 8].

Задача 2.10. Предприниматель арендовал технологическую линию для перерабатывающих станков для изготовления вагонки. Магазин «Стройматериалы» заказал комплекты из трех элементов: две вагонки длиной 2 м и одной вагонки длиной 1,25 м. Поставщик завозит на грузовом автомобиле доски толщиной 20 мм, шириной 100мм и длиной по 6,5 м – 200 шт. и длиной по 4 м – 50 шт.

Рассчитайте, как распилить доски, чтобы продать максимальное количество комплектов [7, 8].

Задача 2.11. Составьте дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в табл. 2.7 [7, 8].

Таблица

Питательные вещества	Требования, % от веса	Содержание питательных веществ в кормах, %			
		люцерновая мука	сухая барда	рыбная мука	соевый шрот
Белок	Не менее 35	17	25	60	45
Жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
Клетчатка	Не более 8	25	2	1	6,5

Задача 2.12. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на фрукты и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся в фруктах, в количествах, указанных в таблице. Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, кг
	клубника	яблоки	смородина	
P_1	3	2	1	30
P_2	1	3	4	70
P_3	0	0	5	40
P_4	1	0	1	50
Цена, р. за 1 кг	1,0	0,5	0,8	

Учебное издание

Ридченко Анатолий Иванович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ЭКОНОМИКЕ**

Учебное пособие для студентов направлений подготовки высшего образования – бакалавриата «Экономика»,
«Государственное и муниципальное управление»

Редактор Н. В. Сафронова
Компьютерная верстка Н. В. Сафроновой

Подписано в печать 11.01.2016 г.

Печать на ризографе. Бумага офсетная. Формат 60×84/16.

Печ. л. 5. Уч.-изд. л. 2,26. Тираж 100 экз. Заказ 2.