ОМСКАЯ ГУМАНИТАРНАЯ АКАДЕМИЯ

А. И. Ридченко

Математические модели и методы социального и экономического прогнозирования

Учебное пособие для студентов направления подготовки высшего образования – магистратуры «Экономика»

Омск 2016

УДК 316.43
ББК 65.272
Р494

Рецензенты:

А. Л. Карпов, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической теории и предпринимательства, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.

В. Ю. Епанчинцев, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики, бухучёта и финансового контроля, Омский государственный аграрный университет им. П. А. Столыпина.

Ридченко, А. И.
Р494 Математические модели и методы социального и экономического прогнозирования : учебное пособие для студентов направления подготовки высшего образования – магистратуры «Экономика» / А. И. Ридченко. – Омск : Изд-во ОмГА, 2016. – 84 с.
ISBN 978-5-98566-116-3

Цель учебного пособия – оказать помощь магистранту в изучении математической части дисциплин «Планирование и прогнозирование экономики», «Моделирование в социальном управлении», «Анализ и прогноз основных социально-экономических показателей в национальной экономике».

Пособие адресовано магистрантам управленческих специальностей, изучающим этот курс, также будет полезно всем, кто занимается анализом и прогнозированием при решении любых задач социального и экономического плана: менеджерам, экономистам.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета академии

ISBN 978-5-98566-116-3

Содержание

Введение

Цель данного учебного пособия – оказать помощь магистрантам в изучении математической части дисциплины «Моделирование в социальном управлении». Пособие разработано в соответствии с действующей учебной программой для магистров.

Процесс социального прогнозирования – конкретная форма теоретического или практического подхода к разработке прогноза, представляет собой цель математических или логических операций, направленных на получение конкретного результата в процессе разработки прогноза. Способ прогнозирования – это получение и обработка информации о будущем на основании имеющейся информации о настоящем и прошлом. Система прогнозирования – это набор методик, критериев и способов, технических средств, предназначенных для прогнозирования сложных социальных явлений или процессов.

Целенаправленное развитие любого государства и общества в целом не может обойтись без научных прогнозов. Для решения теоретических и практических задач управления социальным обществом в настоящее время роль прогностических исследований особенно велика. На протяжении многих лет ставилась задача повысить степень обоснованности прогнозов научно-технического прогресса и социально-экономических процессов, более широко использовать их результаты в разработке перспективных планов. Поскольку прогнозирование социально-экономических явлений и процессов является наименее разработанной областью прогностики, решение таких задач предполагает расширение методологических исследований и методов в прогнозных разработках, а также подготовку специалистов в этой области.

В общем виде прогнозирование – это опережающее отражение действительности. Способность прогнозирования является интеллектуальной деятельностью человека, одной из главных функций человеческого сознания. Основная причина, побуждающая человека заниматься прогнозированием, состоит в том, что существуют явления, будущее которых он не знает, но они имеют важное значение для решений, принимаемых им сегодня. Одним словом, всякая будущая ситуация в той или иной мере является неопределённой. И естественно стремление человека снизить уровень этой неопределённости. Под прогнозом понимается научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем, альтернативных путях и сроках их осуществления. Процесс разработки прогнозов называется прогнозированием. Прогнозирование – это специальные научные исследования конкретных процессов, явлений, событий, в итоге которых из одних, уже известных сведений о прошлом и настоящем, получают представление о возможных состояниях прогнозируемого объекта в будущем, т. е. новые сведения об объекте.

Прогнозирование должно основываться на принципах альтернативности, системности, непрерывности и верификации.

Принцип альтернативности связан с возможностью развития жизни и её отдельных звеньев по разным траекториям, при разных взаимосвязях и структурных отношениях. Необходимость построения альтернатив возникает всегда при переходе от имитации сложившихся процессов и тенденций к предвидению их будущего. Задача практической реализации принципа альтернативности состоит в том, чтобы определить осуществимые варианты развития от вариантов, которые не могут быть реализованы в предвидимых условиях. Необходимо отметить то обстоятельство, что каждой альтернативе развития процесса соответствует своя совокупность проблем, которые нужно учитывать при прогнозировании.

Системность прогнозирования предполагает построение прогноза на основе системы методов и моделей, характеризующихся определённой иерархией и последовательностью. Под системностью методов и моделей прогнозирования следует понимать их совокупность, которая позволяет разработать согласованный и непротиворечивый прогноз по каждому направлению жизни.

Принцип непрерывности прогнозирования состоит в том, что при разработке прогноза его необходимо непрерывно корректировать по мере поступления новой информации. Например, любой долгосрочный прогноз в первоначальном варианте неизбежно носит крупномасштабный характер. С течением времени та или иная тенденция проявляется более явственно и обнаруживает себя со многих сторон. В связи с этим информация, поступающая к прогнозисту и содержащая новые данные, позволяет с большей точностью предсказать наступление того или иного события.

Принцип верификации (проверяемости) направлен на определение достоверности разработанного прогноза. Верификация может быть прямой, косвенной, дублирующей, инверсной.

Пособие содержит семь разделов, изучение которых предполагает знание таких дисциплин, как эконометрика и прогностика.

Пособие может быть полезно и для магистрантов направления подготовки «Менеджмент».

§ 1. Основные понятия моделирования социальных процессов

При моделировании социальных процессов используют два вида данных: пространственные и временные.

Пространственные данные – это данные по какому-либо социальному показателю, полученные от разных однотипных объектов (семья, фирма, регион, страна и т. д.), но относящиеся к одному и тому же моменту времени. Например, данные о доходе семьи, использовании ею электроэнергии и т. п. в один и тот же момент времени (месяц, квартал, год и т. д.).

Временные данные – это данные, характеризующие один и тот же объект в различные моменты времени. Например, данные о средней заработной плате за последние несколько лет, рост населения села за последние 10 лет и т. п.

Также используется три основных класса моделей.

Регрессионные модели – с одним уравнением, в которых зависимая переменная (объясняемая, результирующий признак) представляется в виде функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_m$ – независимые (объясняющие, факторы) переменные, а $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ – неизвестные параметры. В зависимости от вида функции $y = f(x; \beta)$ модели делятся на линейные и нелинейные. Этот класс моделей используется очень широко.

Модели временных рядов – модели, в которых результативный признак является функцией переменной времени или нескольких переменных, относящихся к другим моментам времени. К моделям временных рядов относятся модели, содержащие уравнения тренда, который представляет собой устойчивое изменение уровня социального показателя в течение длительного промежутка времени, а также сезонности, характеризующей устойчивые внутригодовые колебания уровня показателя.

К этим моделям относятся и модели более сложного характера, такие, например, как модели авторегрессии.

Системы одновременных уравнений – модели, которые описываются системами уравнений, состоящих из тождеств и регрессионных уравнений, в каждом из которых содержатся как независимые, так и зависимые переменные.

Переменные, участвующие в модели любого типа, разделяются следующим образом:

Экзогенные (независимые) – переменные, значения которых задаются извне, в определённой степени они являются управляемыми, которые обозначают обычно через (x).

Эндогенные (зависимые) – переменные, значения которых определяются внутри модели, другими словами, взаимозависимые, обычно обозначаются через (y).

Лаговые – экзогенные или эндогенные переменные, датированные предыдущими моментами времени, их обозначают через $(x_{t-1}; y_{t-1})$.

Предопределённые – лаговые и текущие экзогенные переменные $(x_t; x_{t-1})$, а также лаговые эндогенные переменные (y_{t-1}).

Любая модель предназначена для объяснения текущих эндогенных переменных (одной или нескольких) в зависимости от значений предопределённых переменных.

Существуют основные этапы моделирования социальных процессов:

1. Постановочный – формируются и определяются конечная цель исследования и набор переменных, участвующих в модели, их роли.

2. Опытный – проводятся предмодельный анализ экономической сущности изучаемого объекта, формирование и формализация опытной информации, т. е. исходных статистических данных и случайных остаточных составляющих.

3. Параметризация – происходит собственно моделирование изучаемого социального процесса, т. е. выбор общего типа модели, в том числе состава и формы, входящих в неё связей.

4. Информационный – производится сбор необходимой статистической информации, т. е. регистрация значений переменных, участвующих в модели, на различных временных уровнях.

5. Идентификация модели – проводятся статистический анализ модели и в первую очередь статистическое оценивание неизвестных параметров модели.

6. Верификация модели – проводятся сопоставление реальных и модельных данных, проверка адекватности модели, оценка точности модельных данных. В конечном счёте, проверяется, насколько точно построенная модель соответствует моделируемому реальному социальному процессу.

§ 2. Линейные модели парной регрессии

В модели парной линейной регрессии зависимость между переменными в генеральной совокупности представляется в следующем виде:

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon, \qquad (1)$$

где X – независимая переменная (объясняющая или экзогенная);

Y – зависимая переменная (объясняемая или эндогенная);

α и β – независимые параметры уравнения;

ε – регрессионные остатки, то есть совокупность всех неучтённых факторов, оказывающих какое-либо влияние на результативный признак Y.

Следует отметить, что переменная X – неслучайная величина, а Y и ε – случайные величины.

На основе статистических данных, то есть выборочных наблюдений, оценивается выборочное уравнение регрессии в виде:

$$\hat{y} = a + bx, \qquad (2)$$

где a и b – оценки параметров генеральной совокупности α и β.

Для оценки параметров регрессии используют метод наименьших квадратов (МНК), позволяющий получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результирующего признака y_i от теоретических $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}$ минимальна, т. е.

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2 \to \min, \qquad (3)$$

она проводится к системе нормальных уравнений относительно параметров a и b:

$$\begin{cases} na + b\sum x_i = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i, \end{cases} \tag{4}$$

или поделив обе части каждого уравнения на n (объём наблюдений), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b\overline{x} = \overline{y} \\ a\overline{x} + b\overline{x}^2 = \overline{xy}. \end{cases} \tag{5}$$

Для вычисления параметров системы можно воспользоваться следующими формулами:

$$a = \overline{y} - b\overline{x}, \quad b = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x}^2 - (\overline{x})^2} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}. \tag{6}$$

Уравнение регрессии можно записать в виде:

$$\hat{y} = a + bx \text{ или } \hat{y} - \overline{y} = b(x - \overline{x}), \tag{7}$$

т. е. прямая линия проходит через точку $(\overline{x}, \overline{y})$, где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – средние значения переменных x и y, определяемых по формулам:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}; \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}. \tag{8}$$

Выражение $\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y} = \mathrm{cov}(x,y)$ – есть **коэффициент ковариации** переменных x и y, который указывает направление связи между ними, а именно: если $\mathrm{cov}(x;y) > 0$, то между переменными наблюдается рост; если $\mathrm{cov}(x;y) < 0$, то уменьшение; если $\mathrm{cov}(x;y) = 0$, то нет линейной зависимости между ними. Выражение $\overline{x}^2 - (\overline{x})^2 = \sigma_x^2$ – дисперсия по x, которая определяет среднее значение квадрата отклонения переменной x от своего среднего $\overline{x}$. Аналогично выражение $\overline{y}^2 - (\overline{y})^2 = \sigma_y^2$ – дисперсия по y. σ_x, σ_y –

средние квадратичные отклонения по x и по y, то есть среднее отклонение случайной величины от своего среднего.

Коэффициент a даёт прогнозируемое значение результирующего признака $\hat{y}$ при $x = 0$ и в общем случае экономического смысла не имеет.

Коэффициент b носит название **углового коэффициента** прямой линии, а с экономической точки зрения показывает, на сколько единиц в среднем изменяется значение результирующего признака $\hat{y}$ при увеличении независимой переменной (фактора) x на единицу.

Тесноту связи изучаемых социальных явлений, которые описываются переменными x и y, оценивает **линейный коэффициент корреляции** r_{xy} $(-1 \le r_{xy} \le 1)$, вычисляемый по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}_i^2 - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\bar{y}_i^2 - (\bar{y})^2}} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{9}$$

Оценку качества выбранной модели дают средняя ошибка аппроксимации (приближения) и коэффициент детерминации.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее значение отклонения фактических от расчётных (теоретических) вычисляется по формуле:

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\%. \tag{10}$$

Хорошее качество уравнения регрессии, если ошибка аппроксимации в пределах 5–7 %, а допустимый предел значений $\overline{A}$ – не более 8–10 %.

Средний коэффициент эластичности $Э_x$ показывает, на сколько процентов в среднем изменится результирующий признак

y от своей средней величины при изменении фактора x на 1 % от своего среднего значения, и вычисляется по формуле:

$$Э_x = f'(x) \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = b \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}. \qquad (11)$$

Коэффициент детерминации характеризует долю вариации (разброса) зависимой переменной, объяснённую с помощью уравнения регрессии, или долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака y, и вычисляется по формуле:

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2} = 1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}, \qquad (12)$$

где $\Sigma(y_i - \overline{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений значений y_i от своего среднего значения $\overline{y}$ или общая дисперсия;

$\Sigma(\hat{y}_i - \overline{y})^2$ – сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией, то есть часть дисперсии, объясняемая уравнением регрессии, или факторная дисперсия, то есть зависящая от фактора x;

$\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений, то есть необъяснённая часть общей дисперсии или доля необъяснённой дисперсии, или остаточная дисперсия.

Между дисперсиями существует равенство:

$$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = \Sigma(\hat{y}_i - \overline{y})^2 + \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2. \qquad (13)$$

Коэффициент детерминации R^2 принимает значения, принадлежащие промежутку [0; 1], и между ним и линейным коэффициентом корреляции существует равенство $r_{xy}{}^2 = R^2$, причём, если $R^2 = 1$, то $\sum(y_i - \hat{y}_2)^2 = 0$, то говорят, что подгонка уравнения точная, т. е. $y_i = \hat{y}_i$, это означает, что точки наблюдения лежат на уравнении регрессии $\hat{y} = a + bx$; если $R^2 = 0$, то $\Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 0$, т. е. $\hat{y}_i = \bar{y}$, это означает, что переменная x (фактор) не улучшает качества предсказания y по сравнению с горизонтальной прямой $\hat{y} = \bar{y}$, т. е. нет линейной зависимости между переменными x и y.

Чем ближе R^2 к единице, тем лучше качество подгонки к уравнению регрессии, к уравнению модели, т. е. более точно аппроксимирует результирующий признак y выбранная модель регрессии.

Оценка качества уравнения регрессии состоит в проверке F-теста, т. е. в проверке статистической значимости коэффициента детерминации R^2, которая состоит в проверке нулевой гипотезы Ho – о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого производится сравнение фактического $F_{факт}$, которое вычисляется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы, по формуле:

$$F_{факт} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \cdot (n-m-1)}{m \cdot \sum(y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{r_{xy}{}^2}{1 - r_{xy}{}^2} \cdot (n-2) = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}, \quad (14)$$

где n – число наблюдений или объём выборки;

m – число параметров в уравнении регрессии;

$F_{табл}$ – это максимально возможное значение критерия (теста) под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α (уровень значимости α – это вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна, на практике α принимает значения, равные *0,05* или *0,01).* Значения $F_{табл}$ находятся из таблиц приложений, которые даны в конце учебного пособия.

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то нулевая гипотеза Ho, т. е. гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик, отклоняется и признаётся их статистическая значимость и надёжность.

Если $F_{табл} > F_{факт}$, то нулевая гипотеза Ho не отклоняется и признаётся статистическая незначимость, ненадёжность выбранного уравнения регрессии, то есть уравнения модели.

Для оценки статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии и коэффициента корреляции используется t-критерий Стьюдента, а также для расчёта доверительных интервалов каждого из вышеперечисленных показателей при заданном уровне значимости α. Выдвигается нулевая гипотеза Ho, о случайной природе показателя, т. е. о незначимом его отличие от нуля. Оценка t-критерия Стьюдента проводится путём сопоставления его значения с величиной случайной ошибки:

$$t_a = \frac{a}{m_a}; \quad t_d = \frac{b}{m_b} \text{ и } t_r = \frac{r}{m_r}, \tag{15}$$

где m_a, m_b, m_r – случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} m_b = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2)\cdot\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2{}_{ост}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{S_{ост}}{\sigma_x\sqrt{n}}; \\ m_a = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2 \cdot \sum x_i^2}{(n-2)\cdot n\cdot\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{S^2{}_{ост}\cdot\frac{\sum x_i^2}{n^2\cdot\sigma_x^2}} = S_{ост}\cdot\frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n\cdot\sigma_x}; \\ m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $S^2{}_{ост}$ – остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Табличные (критические) значения t-статистики определяются по таблице (см. прил. 1) при определённом значении уровня значимости α и числе степеней свободы *(n – 2).*

Следует отметить, что существует связь между F-критерием Фишера и t-статистикой Стьюдента, определяемая равенством:

$$t_b^2 = t_r^2 = \sqrt{F} \quad . \tag{17}$$

Сравнивая фактическое и табличное значения t, статически принимаем или отвергаем нулевую гипотезу Ho, а именно: если $t_{табл} < t_{факт}$, то Ho отклоняется, то есть a, b и r не случайно отличаются от нуля и определяются влиянием фактора x на результирующий признак y; если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза Ho не отклоняется и признаётся случайная природа параметров a, b и r.

Для определения доверительных интервалов находим предельные ошибки для каждого параметра по формулам:

$$\Delta_a = t_{табл} \cdot m_a ; \; \Delta_b = t_{табл} \cdot m_b ; \; \Delta_r = t_{табл} \cdot m_r \, . \tag{18}$$

Доверительные интервалы определяются по формулам:

$$L_a = a \pm \Delta_a ; L_b = b \pm \Delta_b ; \; L_r = r \pm \Delta_r \, . \tag{19}$$

Прогнозное значение $\hat{y}_p$ определяется путём подставки в уравнение регрессии $\hat{y}=a+bx$ прогнозного значения x_p и вычисляется *средняя стандартная ошибка прогноза* по формуле:

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{ост} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}, \qquad (20)$$

где $\sigma_{ост} = \sqrt{\dfrac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}}$.

Доверительный интервал прогноза строится по формуле:

$$L_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p}, \text{ где } \Delta_{\hat{y}_p} = t_{табл} \cdot m_{\hat{y}_p}. \qquad (21)$$

Формула стандартной ошибки прогноза (18) при заданном значении x_p характеризует ошибку положения линии регрессии. Величина $m_{\hat{y}_p}$ достигает минимума при $x_p = \bar{x}$ и возрастает по мере того, как x_p удаляется от $\bar{x}$ в любом направлении. Иными словами, чем больше разность ($x_p - \bar{x}$), тем больше стандартная ошибка $m_{\hat{y}_p}$.

Следовательно, прогноз тем лучше, чем x_p ближе к $\bar{x}$.

Пример 1. Пусть имеются статистические данные личного дохода и расходов на питание x в условных единицах, приведённых в таблице.

x	2	6	10	14	18
y	9	10	12	19	20

Пусть истинная модель описывается линейным уравнением

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon .$$

В качестве прогнозного будем использовать уравнение $\hat{y} = a + bx$.

Для определения неизвестных параметров a и b составим таблицу.

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	y_i^2	$\hat{y}_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$\left\lvert \dfrac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right\rvert$
1	2	9	4	18	81	7,8	2525	38,44	1,44	0,133
2	6	10	36	60	100	10,9	1616	9,61	0,81	0,09
3	10	12	100	120	144	14,0	4	0	4	0,167
4	14	19	196	266	361	17,1	2525	9,61	3,613,61	0,105
5	18	20	324	360	400	20,2	3636	38,44	0,040,04	0,01
Итого	50	70	660	824	1086	70,0	106	96,1	9,9	-
Среднее	10	14	132	164,8	217,2	14	21,2	19,22	1,98	-
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{x^2}$	$\overline{xy}$	$\overline{y^2}$	$\bar{y}$	$\sum общ$	$\sum факт$	$\sum ост$	0,505

По формулам (5) составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a + 10b = 14 \\ 10a + 132b = 164{,}8, \end{cases}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y_i^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{217{,}2 - (14)^2} = \sqrt{21{,}2} = 4{,}61$$

$$r = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{0{,}775 \cdot 5{,}66}{4{,}61} = \frac{4{,}3865}{4{,}61} = 0{,}952 .$$

Т. к. коэффициент корреляции равен 0,952, т. е. близок к единице, то линейная связь между фактором x и результирующим признаком y очень сильная.

Качество выбранной модели проверим по формуле (12):

$$R^2 = \frac{96,1}{106} = \frac{19,22}{21,2} = 0,906, \ \ (r^2 = R^2) .$$

Таким образом, можно считать, что 90,6 % – вариации (изменения) зависимой переменной, другими словами, расходы на питание объясняются уравнением регрессии, т. е. влиянием фактора, а именно влиянием личного дохода.

Среднюю ошибку аппроксимации вычислим по формуле (10):

$$\overline{A} = \frac{1}{5} \cdot 0,505 \cdot 100\% = 10,1\%,$$

т. е. в среднем расчётное значение отклоняется от статистических (фактических) на 10,1 %, это много, но всё же в пределах нормы.

Коэффициент эластичности вычислим по формуле (11):

$$Э = 0,775 \cdot \frac{10}{14} = 0,554,$$

т. е. при изменение фактора (личного дохода) в среднем на 1 %, можно ожидать изменение результирующего признака (расходы на питание) в среднем на 0,554 %. Т. к. $\bar{x}$ = 10, а 1 % от $\bar{x}$ составляет 0,1, тогда при изменении фактора от своего среднего на 1 % (0,1), в любую сторону следует ожидать соответственно (т. к. b > 0) в среднем изменение от своего среднего значения $\bar{y}$ = 14 на 0,554 %.

Теперь проверим значимость полученных коэффициентов регрессии при уровне значимости α, например, α = 0,05, используя формулы (16) и t-критерий Стьюдента:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{r-2}} = \sqrt{\frac{1-0,906}{5-2}} = \sqrt{0,0313} = 0,177,$$

$$t_r = \frac{r}{m_r} = \frac{0,952}{0,177} = 5,38 = t_{таб}$$

$$t_{фак} = t_{кр} = t_{\alpha} = t_{0,05;3} = 3,1825 \text{ (см. прил. 1).}$$

Сравнивая полученные значения, имеем, что $t_{набл} > t_{кр}$, следовательно, нулевая гипотеза *Ho* (о равенстве нулю коэффициента корреляции) отвергается, т. е. между переменными x и y действительно существует линейная зависимость. Аналогично проверим значимость параметров уравнения *a*, и *b:*

$$m_b = \frac{S_{îñò}}{\sigma_x \sqrt{n}} = \frac{1,82}{5,66 \cdot \sqrt{5}} = 0,144; \quad t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0,775}{0,144} = 5,38;$$

$$m_a = S_{ост} \cdot \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n \cdot \sigma_x} = 1,82 \cdot \frac{\sqrt{1,32}}{5 \cdot 5,66} = 0,738; \quad t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{6,25}{0,738} = 8,47.$$

Так как $t_{кр} = t_{0,05;3} = 3,1825$, то выполняются условия:

$$t_b = t_{набл} > t_{табл} \ (5,38>3,18) \text{ и } t_a = t_{наб} > t_{табл} \ (8,47 > 3,18).$$

Следовательно, в обоих случаях нулевые гипотезы *Ho* отвергаются.

Теперь проверим значимость коэффициента детерминации по F-тесту, используя формулу (14), для этого определим

$$F_{фак} = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2} = \frac{0,906 \cdot 3}{1-0,906} = \frac{2,718}{0,094} = 28,9.$$

Используя распределение Фишера с $k_1 = 1, k_2 = 3$ степенями свободы и при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, т. е.

$$F_{табл} = F_{\alpha,k_1,k_2} = F_{0{,}05;1;3} = 10{,}13 \text{ (см. прил. 2).}$$

Сравнивая $F_{фак}$ и $F_{табл}$, имеем, что $F_{фак} > F_{табл}$ (28,9 > 10,3), следовательно, нулевая гипотеза о незначимости коэффициента R^2 отвергается.

Таким образом, линейную модель можно использовать для прогнозирования, при этом средняя стандартная ошибка прогноза определяется по формуле (20). Пусть требуется по полученному уравнению найти прогнозное значение, например $x_p = 15$, и оценить этот прогноз. По уравнению находим $\hat{y}(15) = 6{,}25 + 0{,}775 \cdot 15 = 17{,}875$. Вычислим среднюю стандартную ошибку:

$$m_{\hat{y}(15)} = \sqrt{\frac{9{,}9}{5-2-1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(15-10)^2}{160}} = 2{,}22 \cdot 1{,}164 = 2{,}58,$$

тогда по формуле (18) вычислим предельную ошибку:

$$\Delta_{\hat{y}(15)} = t_{табл} \cdot m_{\hat{y}(15)} = 3{,}18 \cdot 2{,}58 = 8{,}2.$$

Следовательно, прогнозное значение при $x = 15$ будет равняться

$$\hat{y}(15) = 17{,}875 \pm \Delta = 17{,}875 \pm 8{,}2,$$

т. е. в интервале от 9,675 до 26,075 с вероятностью 0,95 (95 %).

Из формул (20) и (21) следует, что интервал прогнозного значения будет тем меньше, чем прогнозное значение фактора будет ближе к его среднему значению и чем больше объём наблюдений.

§ 3. Нелинейные модели

Если между социально-экономическими явлениями существует нелинейная зависимость, то она может быть описана нелинейной функциональной зависимостью или моделью вида: многочленом любой степени, в частности, второй или третьей степени; гиперболической функцией $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ или $y = \frac{1}{a + b + \varepsilon}$ и т. д.; либо степенной функцией $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$; либо показательной функцией $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$; либо экспотенциальной функцией $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$, где ε – регрессионные остатки. Рассмотрим подробнее применение этих моделей.

3.1. Модели полиномиального вида

Чаще всего используются из этого класса модели, которые заданы в виде квадратного трёхчлена $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$, а в качестве прогнозного уравнения $\hat{y} = a + bx + cx^2$, графиком которой является парабола. Парабола квадратного трёхчлена целесообразна к применению там, где меняется характер связи с определённым изменением фактора, а именно прямая связь меняется на обратную или наоборот. При этом можно определить, при каком значении фактора исследуемый признак принимает максимальное (минимальное) значение. Для этого необходимо первую её производную приравнять к нулю:

$$\hat{y}' = (a + bx + cx^2)' = b + 2cx; \Rightarrow b + 2cx = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2c},$$

которая является вершиной параболы. Для определения параметров этой модели используется метод наименьших квадратов, который сводится к решению системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} an + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum xy, \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum x^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b\overline{x} + c\overline{x^2} = \overline{y} \\ a\overline{x} + b\overline{x^2} + c\overline{x^3} = \overline{xy} \\ a\overline{x^2} + b\overline{x^3} + c\overline{x^4} = \overline{x^2 y}, \end{cases} \tag{22}$$

где n – число наблюдений.

Систему уравнений (22) можно решить одним из известных методов: по формулам Крамера, матричным способом или Гаусса. Приведём несколько примеров применения этой модели.

1. Пусть дана модель $\hat{y} = a + bx + cx^2$, при $b > 0$ и $c > 0$.

Такие кривые отражают рост и падение относительно вершины параболы. Такого рода функции можно наблюдать при изучении экономики труда, где, например, изучается зависимость заработной платы работников физического труда от их возраста, а именно, с увеличением возраста повышается заработная плата работника за счёт увеличения опыта и повышения квалификации его. Однако с определённого возраста на основе старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работников. Пусть такая ситуация характеризуется уравнением:

$$\hat{y} = 1 + 0{,}8x - 0{,}04x^2.$$

Эта функция достигает максимума в точке $\hat{y}' = 0 \Rightarrow \hat{y}' = 0{,}8 - 0{,}08x = 0 \Rightarrow x_0 = 10$.

Из таблицы значений функции можно сделать вывод.

Количество лет x	0	5	10	15	20
Заработная плата y (тыс. р.)	1	4	5	4	1

Заработная плата до 5 лет рабочего стажа будет в пределах одной тысячи рублей, максимального значения, равного 5 (тыс. р.), достигает к 10 годам работы, а затем наступает спад.

Пусть зависимость потребления количества единицы товаров (y) в зависимости от уровня дохода семьи (x тыс. р.) на одного члена семьи описывается уравнением:

$$\hat{y} = 5 + 6x - x^2 \Rightarrow \hat{y}' = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 3.$$

Из приведённой таблицы её значений сделаем вывод.

x (тыс. р.)	1	2	3	4	5
y (ед.)	10	13	14	13	10

Максимальное количество единиц товаров, равное y = 14 (ед.), можно потреблять при 3 (тыс. р.) – дохода семьи на одного её члена.

2. Пусть дана модель $\hat{y} = a + bx + cx^2$, при $b < 0$ и $c > 0$.

Такие модели также отражают рост и падение относительно вершины параболы в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$, но по этим моделям можно определять в этой точке минимальное значение изучаемого признака. Пусть имеется зависимость объёма выпуска продукции (заготовки от сбора урожая на личном участке) $-x$ (количество ед.) от затрат на их производство $-y$ (р.):

$$\hat{y} = 1200 - 60x + 2x^2 \Rightarrow \hat{y}' = -60 + 4x \Rightarrow x_0 = 15 .$$

На основании табличных данных сделаем вывод.

x (количество ед.)	10	12	15	18	20
y (р.)	800	768	750	768	800

Минимальные затраты достигаются при выпуске продукции в количестве 15 (ед.), равном 750 р.

При анализе зависимости описываемой кривой параболического вида используется, чаще всего, не вся кривая, а только её часть, которая действительно описывает экономическую ситуацию.

3.2. Модели гиперболического вида

Модели гиперболического вида $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, где $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ – прогнозное уравнение модели, графиком которой является гипербола. Исследование этой зависимости показывает, что при $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой $y = a$, т. е. минимальным предельным значением y, оценкой которой является параметр a. При $b < 0$ имеем медленно возрастающую зависимость с верхней асимптотой $y = a$ при $x \to \infty$, т. е. определяет максимальный предельный уровень y, оценкой которого также является параметр

a. Оценка параметров a и b модели $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ определяется с помощью МНК из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum\frac{1}{x} = \sum y \\ a\sum\frac{1}{x} + b\sum\frac{1}{x^2} = \sum\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b\bar{z} = \bar{y} \\ a\bar{z} + b\overline{z^2} = \overline{zy}, \end{cases} \tag{23}$$

где $z = \frac{1}{x}$.

Эти модели используются для характеристики удельных расходов сырья, материалов, топлива и т. д. с объёмом выпускаемой продукции; времени обращения товаров от величины товарооборотов и т. п., как на микроуровне, так и на макроуровне. Ярким примером такой зависимости при *b > 0* является кривая Филипса $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$, характеризующая зависимость нормы безработицы x от процента прироста заработной платы y, например, в виде функции $\hat{y} = 0{,}0068 + 0{,}1842 \cdot \frac{1}{x}$, где величина параметра $a = 0{,}0068$ означает, что с ростом уровня безработицы темп прироста заработной платы в пределе стремится к нулю. Соответственно, можно определить тот уровень безработицы, при котором заработная плата оказывается стабильной и темп её прироста равен нулю.

Классическим примером такой зависимости при *b < 0* может служить кривая Энгеля $\hat{y} = a - \frac{b}{x}$, определяющая взаимосвязь доли доходов на товары длительного пользования и общих сумм расходов (доходов), которая определяет такую закономерность, что с ростом дохода доля расходов на непродовольственные товары увеличивается. Естественно, что такое увеличение не беспредельно, т. к. сумма долей расходов должна составлять единицу или 100 %. Рассмотрим пример на применение этой модели.

Пусть данные представлены в виде таблицы:

x – среднемесячный доход семьи (тыс. р.)	1	2	3	4	5	6
y – процент расходов на товары длительного пользования	10,0	13,4	15,4	16,5	18,6	19,1

Для определения параметров a и b модели $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ составим систему нормальных уравнений (23):

$$\begin{cases} 6a + 2{,}45b = 93 \\ 2{,}45a + 1{,}49b = 32{,}8 \end{cases}.$$

Используя формулы Крамера, находим значения a и b: a = 19,8, b = -10,6. Таким образом, уравнение модели будет иметь вид:

$$\hat{y} = 19{,}8 - \frac{10{,}6}{x}.$$

Для определения качества выбранной модели найдём коэффициент детерминации, для этого составим таблицу значений.

Таблица значений

$\hat{y}$	9,2	14,5	16,3	17,2	17,7	18,0	Σ
$y-\hat{y}$	-0,8	1,1	0,9	0,7	-0,9	-1,1	0,0
$(y-\hat{y})^2$	0,64	1,21	0,81	0,49	0,64	1,21	5,0
$y-\bar{y}$	-5,5	-2,1	-0,1	1,0	3,1	3,6	0,0

$(y-\bar{y})^2$	30,25	4,41	0,01	1	9,61	12,96	58,24

Итак, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = TSS = 58{,}24; \Sigma(y-\hat{y})^2 = ESS = 5{,}0$.
Коэффициент детерминации определим по формуле:

$$R^2 = 1-\frac{ESS}{TSS} = 1-\frac{5}{58{,}24} = \frac{53{,}24}{58{,}24} = 0{,}914,$$

что говорит о хорошем выборе модели.

Это явление также хорошо описывается и другой функциональной зависимостью, кривой Лизера – это полулогарифмическая функция вида: $\hat{y} = a + b\cdot\ln x$, если обозначить $\ln x = t$, то уравнение $\hat{y} = a + bt$ станет линейным, параметры которого определяются из системы нормальных уравнений (24):

$$\begin{cases} na + b\sum\ln x = \sum y \\ a\cdot\sum\ln x + b\sum(\ln x)^2 = \sum\ln x\cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b\bar{t} = \bar{y} \\ a\bar{t} + b\bar{t}^2 = \bar{t}\bar{y}. \end{cases} \qquad (24)$$

Применим эту модель для рассмотренного выше примера.
Система уравнений (24) примет вид:

$$\begin{cases} 6a + 6{,}58b = 93 \\ 6{,}58a + 9{,}41b = 113{,}24 \end{cases}.$$

Решая систему, получим: $a = 9{,}88, b = 5{,}13$.

Тогда уравнение модели будет иметь вид: $\hat{y} = 9{,}88 + 5{,}13\ln x$, лучше описывающий указанную ситуацию, чем уравнение Энгеля. Этот факт следует из определения коэффициента детерминации, который выявим из следующей таблицы.

$\hat{y}$	9,9	13,4	15,5	17,0	18,1	19,1	Σ
$y-\hat{y}$	0,1	0,0	-0,11	-0,5	0,5	0,0	0,0

$(y-\hat{y})^2$	0,01	0,0	0,01	0,25	0,25	0,0	0,52

$$R^2 = 1 - \frac{0{,}52}{58{,}24} = \frac{57{,}72}{58{,}24} = 0{,}991.$$

Так как коэффициент детерминации в модели Лизера больше, чем у модели Энгеля, то модель Лизера лучше описывает указанную ситуацию, а следовательно, и прогноз по этой модели выше, чем при использовании модели Энгеля.

3.3. Модели степенного вида

Использование модели степенного вида $y = ax^b \cdot \varepsilon$, где $\hat{y} = ax^b$ – прогнозное уравнение, связано с тем, что параметр b имеет чёткое экономическое толкование, а именно является **коэффициентом эластичности**. Это значит, что величина коэффициента b показывает, на сколько процентов изменится в среднем результирующий признак y при изменении фактора x на один процент. Действительно, формула вычисления коэффициента эластичности имеет вид:

$$Э = y' \cdot \frac{x}{y} \quad ,$$

тогда для степенной функции $y' = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \varepsilon$. Подставим её в формулу:

$$Э = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \varepsilon \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot x \cdot \varepsilon}{a \cdot x^b \cdot \varepsilon} = b.$$

Отметим, что параметр a экономического толкования не имеет.

Для оценки параметров a и b модели используют МНК, который приводит к решению системы нормальных уравнений, для линеаризованного уравнения $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$:

$$\begin{cases} n\ln a + b\sum \ln x = \sum \ln y \\ \ln a \cdot \sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 = \sum \ln x \cdot \ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + b\bar{z} = \overline{m} \\ \bar{z} \cdot t + b\bar{z}^2 = \bar{z} \cdot \overline{m} \end{cases}, \quad (25)$$

где $\ln a = t, \ln x = z, \ln y = m.$

Предположим, что, решая задачу зависимости спроса товара от его цены, было получено уравнение $\ln y = 4{,}66 - 1{,}12 \ln x$ или $\hat{y} = 105{,}6 \cdot x^{-1{,}12}$. Следовательно, что с увеличением цены товара на 1 % в среднем спрос на этот товар снизится на 1,12 %.

С помощью этой модели изучается не только эластичность спроса, но и эластичность предложения. При этом эластичность спроса характеризуется параметром $b < 0$, а эластичность предложения – $b > 0$.

3.4. Модели показательного вида

Использование модели показательного вида $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$, где в качестве прогнозного уравнения берётся уравнение $\hat{y} = a \cdot b^x$, весьма широкое. Коэффициент эластичности определяется по формуле $Э = \ln b \cdot x$. Для определения параметров a и b прологарифмируем уравнение $\ln y = \ln a + x \cdot \ln b$. Если ввести обозначения $\ln y = z, \ln a = p, \ln b = g$, то получим уравнение линейного вида $z = p + gx$, оценки которого определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot \ln a + \ln b \sum x = \sum \ln y \\ \ln a \cdot \sum x + \ln b \cdot \sum x^2 = \sum x \cdot \ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + g\bar{x} = \bar{z} \\ p\bar{x} + g\overline{x}^2 = \overline{xz} \end{cases}. \quad (26)$$

3.5. Модели экспотенциального вида

Довольно широко в экономических задачах используются модели экспотенциального вида $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$, в качестве прогнозного уравнения берётся уравнение $\hat{y} = e^{a+bx}$. Коэффициент эластичности определяется по формуле $Э = bx$. Оценки параметров a и b определяются МНК, если уравнение прологарифмировать $\ln y = a + bx$, введя подстановку $z = \ln y$, получим линейное уравнение $z = a + bx$. Система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} an + b\sum x = \sum \ln y \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum x \ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{z} \\ a\bar{z} + b\bar{x}^2 = \overline{xz} \end{cases}. \qquad (27)$$

В заключении рассмотрим следующую задачу.

По группе предприятий, производящих однородную продукцию, известно, как зависит себестоимость единицы продукции (y) от следующих факторов: объёма производства x_1 (млн р.); оптовой цены за 1 т энергоносителя x_2 (млн р.); трудоёмкости единицы продукции x_3 (чел./час); доли прибыли, изымаемой государством (налоги) x_4 (%). Определить с помощью коэффициентов эластичности силу влияния каждого фактора на изменение себестоимости единицы продукции.

Решение. Величина y в зависимости от x x_1 лучше описывается моделью гиперболического вида: $\hat{y} = 0{,}62 + 58{,}74 \cdot \frac{1}{x_1}$ при среднем значении фактора, равного $\bar{x}_1 = 2{,}64$. Вычислим коэффициент эластичности:

$$Э = y' \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{b}{x_1} \cdot \frac{\bar{x}_1}{a + \frac{b}{\bar{x}_1}} = -\frac{b}{a\bar{x}_1 + b} = \frac{58{,}74}{0{,}62 \cdot 2{,}64 + 58{,}74} = -0{,}973\%.$$

Зависимость себестоимости от энергоносителя лучше описывается моделью степенного вида $\hat{y} = 11{,}75 + x_2^{1,63}$, при среднем значении $\overline{x}_2 = 1{,}5$. Коэффициент эластичности вычислим по формуле:

$$Э = y' \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = b = 1{,}63\%.$$

Зависимость себестоимости от трудоёмкости единицы продукции лучше определяется моделью линейного вида $\hat{y} = 9{,}3 + 9{,}83 \cdot x_3$, при среднем значении $\overline{x}_3 = 1{,}38$. Коэффициент эластичности вычислим по формуле:

$$Э = y' \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = b \cdot \frac{\overline{x}_3}{a + b\overline{x}_3} = \frac{9{,}83 \cdot 1{,}38}{9{,}9 + 9{,}83 \cdot 1{,}38} = 0{,}59\%.$$

Зависимость же себестоимости от изымаемой доли прибыли (налоги) лучше описывается моделью показательного типа $\hat{y} = 14{,}87 \cdot 1{,}02^{x_4}$, при среднем значении $\overline{x}_4 = 26{,}3$. Коэффициент эластичности будет равен:

$$Э = y' \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \ln b \cdot \overline{x}_4 = \ln 1{,}02 \cdot 26{,}3 = 0{,}42\%.$$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: для формирования уровня себестоимости единицы продукции предприятиям следует обратить первоочередное внимание на цены энергоносителей. В меньшей степени влияют трудоёмкость продукции и налоги. Фактором снижения себестоимости выступает размер производства: с ростом его на 1 % себестоимость единицы продукции снижается на –0,973 %.

Надёжность модели нелинейного типа можно проверить по F-критерию Фишера. Для этого следует вычислить коэффициент индекса детерминации и F-критерий по формулам:

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2},\ F_{фак} = \frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m-1}{m},\ F_{табл} = F_{(\alpha;k_1;k_2)}, \quad (28)$$

где R^2 – индекс детерминации;

n – число наблюдений;

m – число параметров при переменных x;

α – уровень значимости;

$k_1 = n-m-1$;

$k_2 = m$.

Если $F_{табл} < F_{фак}$, то гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признаётся статистическая значимость и надёжность уравнения модели.

§ 4. Модели множественной регрессии

Если изучаемый результативный признак (y) зависит от нескольких факторов ($x_1,\ldots,x_к$), то можно построить модель множественной регрессии $y = f(x_1,x_2,...x_к,\varepsilon)$. Для построения модели множественной регрессии чаще всего используются модели, описываемые следующими функциями:

- линейной: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_кx_к + \varepsilon$;
- степенной: $y = b_0x_1^{b_1}\cdot x_2^{b_2}\cdot ...\cdot x_к^{b_к}\cdot\varepsilon$;

▪ гиперболой: $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_к x_к + \varepsilon}$;

▪ экспонентой: $y = e^{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_к x_к + \varepsilon}$,

а также другими функциями, модели которых можно приводить к линейному виду.

Для оценки параметров множественной регрессии используют МНК, как и в случае парной регрессии. В соответствии с МНК минимизируется сумма квадратов остатков:

$$\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma e_i^2 - \min,$$

где $\hat{y}_i$ – прогнозное уравнение модели.

Необходимым условием её минимума является равенство нулю всех её частных производных по $b_0, b_1, b_2, ..., b_к$. В результате приводим к системе из *(к +1)* линейного уравнения с *(к +1)* неизвестными, которая носит название системы нормальных уравнений и имеет единственное решение. Решение таких систем рациональнее искать в маркетинговой форме. Составляются матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{к1} \\ 1 & x_{22} & ... & x_{к2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_{nn} & ... & x_{кn} \end{pmatrix}$$ – матрица объясняющих переменных

факторов, размерности *((к + 1)· n),* где x_{ij} – элементы матрицы (i – номер переменной (фактора); j – номер наблюдения переменной);

$У = (y_1, y_2, ... y_n)^T$ – матрица-столбец результирующего признака размерности *(n · 1)*;
$\beta = (b_0, b_1, b_2, ..., b_к)^T$ – вектор параметров модели, размерности $((к+1) \cdot 1)$; ε – регрессионные остатки, т. е. все неучтённые факторы.

Тогда модель в матричной форме примет вид:

$$Y = X \cdot \beta + \varepsilon .$$

Как и в случае регрессионного уравнения с одной переменной, целью метода является выбор вектора оценок β параметров модели, минимизирующего сумму квадратов остатков e_t (т. е. квадрат длины вектора остатков e):

$$e = y - \hat{y} = y - \beta x, \; \sum e_t^2 = e^T \cdot e - \min .$$

Так как

$$e^T \cdot e = (y - \hat{\beta} x)^T (y - \hat{\beta} x) = y^T \cdot y - 2\beta^T x^T y + \hat{\beta}^T x^T x \hat{\beta} .$$

Используя необходимые условия минимума и дифференцируя по $\hat{\beta}$, получим:

$$-2x^T y + 2x^T x \hat{\beta} = 0 ,$$

откуда находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta} = (x^T \cdot x)^{-1} \cdot x^T \cdot y .$$

Теоретические дисперсии в матричной форме определяются выражениями:

$$D(\beta_j) = (x^T \cdot x)^{-1}_{jj}\sigma^2,$$

где σ^2 – дисперсия свободного члена.

Несмещённой оценкой σ^2 является величина S^2 (остаточная дисперсия):

$$S^2 = \frac{1}{n - к - 1} \cdot \sum e_i^2 .$$

Величина S называется **стандартной ошибкой регрессии.**

Заменяя в теоретических дисперсиях неизвестную дисперсию σ^2 на её оценку S^2 и извлекая квадратный корень, получим стандартные ошибки оценок коэффициентов регрессии:

$$S_{bj} = S\sqrt{(x^T \cdot x)^{-1}_{jj}} .$$

Отметим, что при использовании компьютерных программ коэффициенты регрессии $b_0, b_1, b_2, ..., b_к$ и их стандартные отклонения вычисляются одновременно.

Пример 2. По данным бюджета семи случайно выбранных семей изучалась зависимость накопления (y) от дохода ($x_1\,x_1$) и стоимости имущества ($x_2\,x_2$) в условных единицах. Данные представлены в таблице.

y	2	7	5	4	2	7	6
x_1	40	55	45	30	30	60	50
x_2	60	40	40	15	90	30	30

Используя компьютерную программу, получим прогнозное уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 0,45 + 0,129x_1 - 0,034x_2 .$$

Стандартная ошибка регрессии S = 0,97, а стандартные ошибки параметров уравнения, соответственно, равны:

$$b_0 = 2,06; b_1 = 0,036; b_2 = 0,017 .$$

Из полученного уравнения модели можно сделать следующие выводы.

1. Прогнозируемое накопление семьи, имеющей доход 30 (усл. ед.) и имущество стоимостью 40 (усл. ед.):

$$\hat{y} = 0,45 + 0,129 \cdot 30 - 0,034 \cdot 40 = 2,96 .$$

2. Если доход семьи возрастет на 10 (усл. ед.), а стоимость имущества не изменится, то накопление тоже возрастёт на величину, равную:

$$\Delta y = 0,129 \cdot \Delta x_1 = 0,129 \cdot 10 = 1,29 ,$$

и станет равной 4,25 (усл. ед.).

3. Если доход семьи вырастет на 5 (усл. ед.), а стоимость имущества увеличится, например, на 10 (усл. ед.), то накопление возрастёт на величину, равную:

$$\Delta y = 0,129 \cdot \Delta x_1 - 0,034 \cdot \Delta x_2 = 0,129 \cdot 5 - 0,034 \cdot 10 = 0,305 ,$$

и станет равной 0,755 (усл. ед.).

Качество выбранной модели проверяется коэффициентом детерминации из следующего равенства:

$$\underset{(n-1)}{TSS} = \underset{(n-\kappa-1)}{ESS} + \underset{(\kappa)}{RSS}$$

(в скобках указано число степеней свободы, соответствующее каждому члену уравнения).

В матричной форме это равенство имеет вид:

$$\left\|Y-\overline{Y}I\right\|^2=\left\|Y-\hat{Y}\right\|^2+\left\|\hat{Y}-\overline{Y}I\right\|^2,$$

где I – единичная матрица.

Коэффициент детерминации определяется по формуле:

$$R^2=\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{ESS}{TSS}$$

и является мерой влияния факторов на изменение результирующего признака.

Замечено, что с увеличением числа факторов обычно коэффициент детерминации увеличивается, в этом случае пользуются так называемым **скорректированным коэффициентом детерминации** с поправкой на число степеней свободы:

$$\overline{R}^2=1-\frac{n-1}{n-\kappa-1}\cdot\frac{ESS}{TSS},$$

если увеличение доли объяснённой дисперсии при добавлении нового фактора мало, то коэффициент $\overline{R}^2$ может уменьшиться, следовательно, добавлять новый фактор нецелесообразно.

Значимость уравнения множественной регрессии (модели) в целом оценивается с помощью F-критерия Фишера:

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-\kappa-1}{\kappa}.$$

Значимость параметров уравнения регрессии (модели) b_i оценивается с помощью критерия *t*:

$$t_i = \frac{b_i}{S_{b_i}},$$

имеющего распределение Стьюдента с $v = n - \kappa - 1$ степенями свободы. *t* – статистика обеспечивает эффективную проверку значимости фактора при условии, что все другие факторы уже включены в модель.

Последовательный отсев несуществующих факторов, слабо влияющих на результативный признак, составляет основу многошагового регрессионного анализа. Отметим, что по коэффициентам параметров b_i регрессии (модели) нельзя определить, какой из факторов оказывает наибольшее влияние на результирующий признак, так эти коэффициенты несопоставимы между собой в силу их различного измерения. Различия в единицах измерения факторов можно устранить с помощью **частных коэффициентов эластичности**, вычисляемых по формуле:

$$Э_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

где $\bar{x}_i$ – среднее значение фактора.

Частные коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется результирующий признак при изменении данного фактора на 1 %, при условии, что остальные факторы фиксированы.

При построении уравнения множественной регрессии (модели) могут возникнуть проблемы **мультиколлинеарности** факторов, т. е. их тесной линейной зависимости между собой. Считается на практике, что если их коэффициент корреляции $z_{x_i y_j} \geq 0{,}7$, то факторы x_i и x_j явно коллинеарны между собой, а поэтому их влияние на результирующий признак несущественно. Для оценки мультиколлинеарности факторов используются ковариационная и корелляционная матрицы.

Ковариационная матрица:

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix},$$

где m = к +1, $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(x_i; x_j)$.

Отметим, что эта матрица симметрическая.

Корреляционная матрица:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{pmatrix},$$

где $r_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj})^{1/2}}$.

Отметим, что $r_{ij} = 1$, для $i = j$, и матрица симметрическая. При этом, если бы факторы не коррелировали между собой, то корреляционная матрица была бы единичной и её определитель

$det(R) = 1$, а если бы между факторами существовала полная линейная корреляция ($r_{ij} = 1$), то $det(R) = 0$, т. е. чем ближе определитель матрицы к нулю, тем сильнее мультиколлинеарность факторов модели, и, наоборот, чем ближе к единице, тем надёжнее выбранная модель регрессии.

Уравнения множественной регрессии (модели) могут включать в качестве факторов и качественные признаки, например, профессию, пол, образование, климатические условия, отдельные определённые регионы и т. д. Чтобы в модель ввести такие факторы, их необходимо упорядочить и присвоить им те или иные количественные значения, чаще всего числа 0 и 1. Такого вида факторы принято называть **фиктивными факторами** (фиктивные переменные).

Например, включая фиктивный фактор, обозначающий пол, можно его записать в следующей форме:

$$z = \begin{cases} 1 \text{ – мужской пол;} \\ 0 \text{ – женский пол.} \end{cases}$$

Коэффициент регрессии при фиктивном факторе можно рассматривать как среднее изменение результирующего признака при переходе от одной категории (мужской пол) к другой категории (женский пол), при этом остальные параметры уравнения модели считаются неизменными. На основании *t*-критерия Стьюдента проверяется значимость влияния фиктивного фактора на изучаемый результирующий признак.

Пример 3. Предположим, что по группе лиц мужского и женского пола изучается функция спроса. Известно, что потребление кофе зависит линейно от его цены, которая имеет вид $y = a + bx + \varepsilon,$ где y – количество потребляемого кофе, а x – его цена (в усл. ед.). Тогда модель задачи с учётом введения в неё фиктивного фактора z (пол) будет иметь вид:

$$y = a + b_1 x + b_2 z + \varepsilon,$$

где z = $\begin{cases} 1 – \text{мужской пол;} \\ 0 – \text{женский пол;} \end{cases}$

a, b_1 и b_2 – параметры модели;

ε – регрессионные остатки.

Эта модель может рассматривать потребление кофе мужчинами, аналогично можно построить модель по спросу на кофе только женщинами.

§ 5. Временные ряды

Модели, построенные по данным, характеризующим один объект за ряд последовательных периодов времени, называются **моделями временных рядов**.

Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных периодов времени. Каждый уровень временного ряда y_t формируется под действием длительных, кратковременных и случайных факторов.

Длительные, постоянно действующие факторы, оказывают на изучаемый результативный признак определённое влияние и формируют основную тенденцию ряда – называемую трендом $T(t)$. *Кратковременные,* периодические факторы, формируют сезонные колебания временного ряда – $S(t)$. *Случайные* факторы, оказывающее какое-то влияние на изучаемый объект, $-\varepsilon(t)$.

Модель, в которой временной ряд представлен в виде суммы указанных компонентов, т. е. в виде:

$$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t),$$

называется *аддитивной формой* временного ряда.

Модель, в которой перечисленные компоненты представлены в виде произведения, т. е.:

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot \varepsilon(t),$$

называется *мультипликативной.*

Выбор модели в основном зависит от структуры сезонных колебаний. В частности, если амплитуда сезонных колебаний стремится к постоянной величине, то используется первая (аддитивная) форма, если она переменчива, то вторая.

Пример 4. Имеются данные об объёме потребления электроэнергии с использованием фактора времени в некотором районе за четыре года (поквартально) в усл. ед. Данные представлены в таблице.

Год, квартал	1	2	3	4
I	6,0	7,2	8,0	9,0
II	4,4	4,8	5,6	6,6
III	5,0	6,0	6,4	7,0
IV	9,0	10,0	11,0	10,8

При построении модели временного ряда используем фиктивные факторы для оценки по кварталам потребления электроэнергии, в качестве основного (опорного) возьмём первый квартал, а модель в виде линейной функции вида:

$$y = a + bt + \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 + \varepsilon ,$$

где z_1, z_2 и z_3 – фиктивные факторы, определяемые следующим образом:

$$z_1 = \begin{cases} 1 \text{ (II квартал)}, \\ 0 \text{ (все остальные)}; \end{cases} \quad z_2 = \begin{cases} 1 \text{ (III квартал)}, \\ 0 \text{ (все остальные)}; \end{cases} \quad z_3 = \begin{cases} 1 \text{ (IV квартал)} \\ 0 \text{ (все остальные)}; \end{cases}$$

α, β и γ – параметры модели, определяющие величину эффекта, вызываемого сменой времени года.

Исходные данные с учётом фиктивных факторов даны в следующей таблице.

y	t	z_1	z_2	z_3	y	t	z_1	z_2	z_3
6,0	1	0	0	0	8,0	9	0	0	0
4,4	2	1	0	0	5,6	10	1	0	0
5,0	3	0	1	0	6,4	11	0	1	0
9,0	4	0	0	1	11,0	12	0	0	1
7,2	5	0	0	0	9,0	13	0	0	0
4,8	6	1	0	0	6,6	14	1	0	0
6,0	7	0	1	0	7,0	15	0	1	0
10,0	8	0	0	1	10,8	16	0	0	1

Используя компьютерную программу, получили прогнозное уравнение модели: $\hat{y} = 6{,}24 + 0{,}19t - 2{,}39z_1 - 1{,}82z_2 + 2{,}09z_3$, при этом коэффициент детерминации равен $R^2 = 0{,}985$, т. е. очень хорошая модель.

Отдельные уравнения для каждого квартала будут следующие:

$$\hat{y} = 6{,}24 + 0{,}19t - I\ \text{квартал};\ \hat{y} = 3{,}85 + 0{,}19t - II\ \text{квартал;}$$
$$\hat{y} = 4{,}42 + 0{,}19t - III\ \text{квартал;}\ \hat{y} = 8{,}33 + 0{,}19t - IV\ \text{квартал.}$$

Усредняя эти уравнения, получим уравнение линейного тренда:

$$T(t) = \frac{1}{4}(6{,}24 + 3{,}85 + 4{,}42 + 8{,}33) + 0{,}19t = 5{,}71 + 0{,}19t\,.$$

Разность между уравнением модели регрессии каждого квартала и трендом даёт оценку колебания сезонной компоненты на каждый конкретный квартал, в нашем примере:

$$S_1 = 6{,}24 - 5{,}71 = 0{,}53\ (I\ \text{кв.});\ S_2 = 3{,}85 - 5{,}71 = -1{,}86\ (II\ \text{кв.});$$
$$S_3 = 4{,}42 - 5{,}71 = -1{,}29\ (III\ \text{кв.});\quad S_4 = 8{,}33 - 5{,}71 = 2{,}62\ (IV\ \text{кв.}).$$

Отметим, что сумма отклонений обязана равняться нулю, в нашем случае: 0,53 – 1,86 – 1,29 + 2,62 = 0.

Корреляционная зависимость между последовательными уровнями ряда называется автокрреляцией уровней временного ряда.

Коэффициент автокорреляции порядка τ определяется как коэффициент корреляции между рядами y_t и $y_{t-\tau}$:

$$r_\tau = \frac{\operatorname{cov}(y_t; y_{t-\tau})}{\sqrt{\Sigma(y_t - \bar{y}_t)^2 \cdot \Sigma(y_{t-\tau} - \bar{y}_{t-\tau})^2}}\ ,$$

где $\bar{y}_t$ и $\bar{y}_{t-\tau}$ – средние значения соответствующего ряда.

Число периодов τ, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называется лагом. С увеличением лага число пар значений, по которым считается коэффициент автокорреляции, уменьшается на единицу.

Для нашего примера следующие значения коэффициентов автокорреляции: $r_1 = 0{,}165$; $r_2 = -0{,}566$; $r_3 = 0{,}113$ и $r_4 = 0{,}983$.

Последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и более высокого порядка определяют значения автокорреляционной функции временного ряда.

Отметим, что если наиболее высоким оказался первый коэффициент автокорреляции во временном ряде, то это означает, что исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если более высоким оказывается коэффициент $\tau > 1$, то это означает, что временной ряд подвержен сезонным колебаниям с периодом, равным τ.

Анализируя наш пример, видим, что $r_4 = 0{,}983$ – самый высокий коэффициент, это означает, что во временном ряде линейной тенденции присутствуют сезонные колебания с периодичностью четыре квартала.

§ 6. Системы одновременных уравнений

Системы уравнений, в которых каждая переменная может быть в роли независимой в одном уравнении, а в другом – в роли зависимой переменной, носят название **системы одновременных уравнений**.

Пусть задана простейшая модель вида:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_2 + b_{21} y_1 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где x и y – одновременно зависимая и независимая переменные;

ε_1 и ε_2 – случайные переменные (регрессионные остатки);

Отформатировано: По ширине, Отступ: Слева: 0,95 см, Первая строка: 0 см, Междустр.интервал: множитель 1,15 ин, Поз.табуляции: нет в 0 см

a и b – параметры модели.

Система уравнений, зависимая в указанной выше форме, носит название **структурной формы модели**. Структурная форма модели обычно включает в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и уравнения, отражающие тенденцию развития явления, а также разного рода уравнения тождества. Тождества не содержат каких-либо параметров, подлежащих их оценке, а также не включают в себя случайного члена. Приведём пример такой модели:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1 \text{ – функция потребления;} \\ I_t = a_2 + b_{21}Z_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2 \text{ – функция инвестиций;} \\ Z_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3 \text{ – функция денежного рынка;} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \text{ – тождество дохода,} \end{cases}$$

где C_t – расходы на потребление в период t;

Y_t – совокупный доход в период t;

I_t – инвестиции в период t;

Z_t – процентная ставка в период t;

M_t – денежная ставка в период t;

G_t – государственные расходы в период t;

C_{t-1} – расходы на потребление в период *(t-1)*;

I_{t-1} – инвестиции в период *(t-1)*;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – регрессионные остатки.

В процессе оценивания параметров системы одновременных уравнений следует различать эндогенные и экзогенные переменные. В качестве экзогенных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (лаговые переменные). Предполагается, что в каждом уравнении экзогенные переменные не коррелированы со случайным членом. В общем случае эндогенные переменные коррелированы со случайным членом, а поэтому переменные МНК к структурной форме модели приводят к смещённым и несостоятельным оценкам структурных коэффициентов. Для определения структурных коэффициентов модели необходимо структурную форму модели привести, преобразовать с помощью алгебраических преобразований к приведённой форме модели, т. е. форме, в которой эндогенные переменные выражены чётко только через экзогенные переменные и регрессионные остатки. В нашем первом приведённом примере модель примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 + \bar{\varepsilon}_1 \\ y_2 = \bar{a}_2 + \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 + \bar{\varepsilon}_2 \end{cases},$$

где $\bar{a}$ – параметры приведённой формы;

$\bar{\varepsilon}$ – регрессионные остатки.

Параметры приведённой формы оцениваются обычно МНК, поскольку экзогенные переменные не коррелированы со случайными членами (регрессионными остатками).

Оценённые коэффициенты приведённой формы модели могут быть использованы для оценки параметров структурной формы модели. Такой способ оценивания коэффициентов структурной формы модели носит название **косвенного метода наименьших квадратов**.

Тот или иной коэффициент структурной модели может либо однозначно выражаться через коэффициенты приведённой формы, либо иметь несколько разных оценок, либо вообще не выражаться через них.

Структурный коэффициент называется **идентифицируемым**, если он выражается через коэффициенты приведённой формы модели, причём **точно идентифицируемым**, если он единственен, и **сверхидентифицируемым**, если он имеет несколько разных оценок; в остальных случаях он считается **неидентифицируемым**.

Структурная форма модели считается идентифицируемой, если каждое уравнение формы идентифицируемо, если же хотя бы один коэффициент неидентифицируем, то и вся модель считается неидентифицируемой.

Коэффициенты структурной формы модели могут быть оценены различными способами в зависимости от системы одновременных уравнений. Отметим, что наиболее известны следующие методы:

- косвенный метод наименьших квадратов (КМНК);
- метод инструментальных переменных (МИП);
- двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Проверку каждого уравнения структурной формы модели на идентификацию можно провести на основании необходимого и достаточного условий идентификации.

Необходимое условие идентификации – выполнение счётного правила:

- Д + 1 = Н – уравнение точно идентифицируемо;
- Д + 1 < Н – уравнение неидентифицируемо;
- Д + 1 > Н – уравнение сверхидентифицируемо;

где Д – число предполагаемых переменных, отсутствующих в уравнении, но присутствующих в системе уравнений;

Н – число эндогенных переменных в уравнении.

Достаточное условие идентификации – определитель матрицы, составленный из коэффициентов при переменных, отсутствующих в исследуемом уравнении, отличен от нуля, и ранг этой матрицы не менее числа эндогенных переменных системы уравнений без единицы.

Для решения идентифицируемого уравнения системы применятся КМНК, а для решения сверхидентифицируемого уравнения – ДМНК.

Алгоритм применения КМНК:

- Составляется приведённая форма модели и определяются численные значения параметров модели каждого уравнения обычным МНК.
- Путём алгебраических преобразований переходят от приведённой формы к уравнениям структурной формы модели, получая тем самым оценки структурных параметров модели.

Алгоритм применения ДМНК:

- Составляется приведённая форма модели и определяются численные значения параметров модели каждого уравнения приведённой формы модели.
- Обычным МНК определяют параметры структурного уравнения, используя в качестве исходных данных фактические значения предопределённых переменных и расчётные значения эндогенных переменных, стоящих в правой части данного структурного уравнения.

В приведённом выше примере проведём исследование системы одновременных уравнений, заданной в структурной форме, на идентификацию.

Модель включает четыре эндогенные переменные (C_t; Y_t; I_t; Z_t) и четыре предопределённые переменные, т. е. две экзогенные переменные (M_t; G_t) плюс две лаговые эндогенные переменные (C_{t-1}; I_{t-1}).

Проверим необходимое и достаточное условие идентификации каждого уравнения в структурной форме модели.

Первое уравнение. Это уравнение содержит две эндогенные переменные ($C_t;Y_t$) и одну предопределённую переменную (C_{t-1}). Следовательно, число предопределённых переменных, не входящих в это уравнение, плюс единица больше числа эндогенных переменных, входящих в уравнение: 3 + 1 > 2. Счётное правило выполняется, причём уравнение сверхидентифицируемо. Проверим достаточное условие, для этого составим матрицу при переменных, не входящих в уравнение, но присутствующих в системе, она имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг матрицы равен 3, следовательно, достаточное условие выполняется.

Второе уравнение. Уравнение содержит две эндогенные переменные (I_t; Z_t) и не содержит три предопределённые переменные. Следовательно, необходимое условие выполняется, причём уравнение также сверхидентифицируемо.

Составим матрицу:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг матрицы равен 3, т. е. достаточное условие выполняется.

Третье уравнение. Уравнение имеет две эндогенные переменные (Y_t; Z_t) и не содержит три предопределённые переменных, следовательно, оно сверхидентифицируемо.

Составим матрицу:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен 3, т. е. достаточное условие выполняется.

Четвёртое уравнение представляет собой тождество, параметры которого известны, следовательно, в исследовании его на идентификацию необходимости нет.

Таким образом, все уравнения структурной формы модели сверхидентифицируемы, поэтому для оценки параметров всех уравнений нужно использовать ДМНК.

Приведем пример. Пусть имеются данные о потреблении мяса в год, которые представлены в таблице, в условных единицах.

Год	Годовое потребление продукта на душу населения (кг), y_1	Оптовая цена 100 г продукта, y_2	Доход на душу населения (р.), x_1	Расходы на обработку продукта в % к его цене, x_2
1999	60	5,0	1300	60
2000	62	4,0	1300	56
2001	65	4,2	1500	56
2002	62	5,0	1600	63
2003	66	3,8	1800	50

1. Построим структурную модель вида:

$$\begin{cases} y_1 = f(y_2; x_1); \\ y_2 = \varphi(y_1; x_2), \end{cases}$$

рассчитав соответствующие коэффициенты модели.

Будем считать, что уравнения, связывающие данные переменные, линейны. Тогда система одновременных уравнений с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты при переменных (x),

b_{ij} – коэффициенты при переменных (y).

В каждом уравнении по две эндогенные переменные и одна отсутствующая переменная из имеющихся, которые имеет система. Для каждого уравнения справедливо счётное правило: Д + 1 = Н (1 + 1 = 2), это означает, что каждое уравнение точно идентифицируемо. Нетрудно проверить выполнение достаточного условия идентифицируемости, что предлагается сделать читателю самостоятельно.

2. Для определения параметров структурной формы модели будем использовать КМНК. Для этого структурную форму необходимо преобразовать в приведённую форму вида:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2; \\ y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2, \end{cases}$$

в которой коэффициенты δ_{ij} при x определяются обычным МНК.

Для простоты вычислений будем использовать не сами значения переменных x и y, а их отклонения от своих средних, в результате чего уравнение в системе не будет иметь свободных членов. Исходные данные представим в виде матрицы; средние значения переменных определяем из исходной таблицы.

Итак: $\overline{y}_1 = 63$; $\overline{y}_2 = 4{,}4$; $\overline{x}_1 = 1500$; $\overline{x}_2 = 57$.

	$y_1 = y_i - \overline{y}_1$	$y_2 = y_i - \overline{y}_2$	$x_1 = x_i - \overline{x}_1$	$x_2 = x_i - \overline{x}_2$
	-3	0,6	-200	3
	-1	-0,4	-200	-1
	2	-0,2	0	-1
	-1	0,6	100	6
	3	-0,6	300	-7
Σ	0	0	0	0

3. Для определения коэффициентов первого уравнения приведённой формы модели δ_{11} и δ_{12} составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}\sum x_1^2 + \delta_{12}\sum x_1 \cdot x_2 = \sum x_1 \cdot y_1, \\ \delta_{11}\sum x_1 \cdot x_2 + \delta_{12}\sum x_2^2 = \sum x_2 \cdot y_1. \end{cases}$$

Вычислим указанные суммы:

$$\sum x_1^2 = (-200)^2 + (-200)^2 + 0 + (100)^2 + (300)^2 = 180000$$
$$\sum x_2^2 = (3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (6)^2 + (-7)^2 = 96$$
$$\sum x_1 \cdot x_2 = (-200)\cdot 3 + (-200)\cdot(-1) + 0\cdot(-1) + 100\cdot 6 + 300(-7) = -1900$$
$$\sum x_1 \cdot y_1 = (-200)\cdot(-3) + (-200)\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 100(-1) + 300\cdot 3 = 1600$$
$$\sum x_2 \cdot y_1 = 3\cdot(-3) + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 6\cdot(-1) + (-7)\cdot 3 = -37$$

Тогда система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 180000\cdot\delta_{11} - 1900\cdot\delta_{12} = 1600, \\ -1900\cdot\delta_{11} + 96\cdot\delta_{12} = -37. \end{cases}$$

Из этой системы получаем: $\delta_{11} = 0,00609$; $\delta_{12} = -0,26481$.

Следовательно, можно записать первое уравнение приведённой формы модели: $y_1 = 0,00609x_1 - 0,26481x_2$.

Аналогично определяем коэффициенты δ_{21} и δ_{22} для второго уравнения системы из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{21}\Sigma x_1^2 + \delta_{22}\Sigma x_1 \cdot x_2 = \Sigma x_1 \cdot y_2, \\ \delta_{21}\Sigma x_1 \cdot x_2 + \delta_{22}\Sigma x_2^2 = \Sigma x_2 \cdot y_2. \end{cases}$$

Здесь не известны только следующие суммы:

$$\Sigma x_1 \cdot y_2 = (-200)\cdot(0,6) + (-200)\cdot(-0,4) + 0\cdot(-0,2) + 100\cdot(0,6) + 300\cdot(-0,6) = -160$$
$$\Sigma x_2 \cdot y_2 = 3\cdot(0,6) + (-0,1)\cdot(-0,4) + (-0,1)\cdot(-0,2) + 6\cdot(0,6) + (-7)\cdot(-0,6) = 10,2.$$

Система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 180000\delta_{21} - 1900\delta_{22} = -160 \\ -1900\delta_{21} + 96\delta_{22} = 10,2, \end{cases}$$

из которой определяются коэффициенты: $\delta_{21} = 0,00029$; $\delta_{22} = 0,11207$, а второе уравнение примет вид: $y_2 = 0,00029x_1 + 0,11207x_2$.

Итак, приведённая форма имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0,00609x_1 - 0,26481x_2 \\ y_2 = 0,00029x_1 + 0,11207x_2. \end{cases}$$

4. Из приведённой формы модели перейдём к структурной форме модели. Для этого из приведённой формы определим коэффициенты структурной модели путём алгебраических преобра-

зований, а именно: из второго уравнения найдём $x_2 = \dfrac{y_2 - 0{,}00029x}{0{,}11207}$ и подставим его в первое уравнение системы:

$$y_1 = 0{,}00609x_1 - \frac{y_2 - 0{,}00029x_1}{0{,}11207} \cdot 0{,}26481 = -2{,}36290y_2 + 0{,}00678x_1.$$

Аналогично из первого уравнения определим $x_1 = \dfrac{y_1 + 0{,}26481x_2}{0{,}00609}$ и подставим его во второе уравнение системы:

$$y_2 = 0{,}00029 \cdot \frac{y_1 + 0{,}26481x_2}{0{,}00609} + 0{,}11207x_2 = 0{,}04762y_1 + 0{,}12468x_2.$$

Таким образом, получена окончательная структурная форма модели:

$$\begin{cases} y_1 = -2{,}36290y_2 + 0{,}00678x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 0{,}04762y_1 + 0{,}12468x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}.$$

5. На основании построенной модели можно прогнозировать, например, в 2017 году при следующих условиях: доход на душу населения составит 1900 (усл. ед.), расходы на обработку мяса от его цены составят 50 %, а оптовая цена мяса на 100 г составит 8,0 (усл. ед.). Тогда, используя первое уравнение системы, можно рассчитать годовое потребление мяса на душу населения (кг):

$$y_1 = -2{,}36290 \cdot 8{,}0 + 0{,}00678 \cdot 1900 = -6{,}0212.$$

Это говорит о том, что если по данным за 5 лет в среднем потребление мяса в соответствующем регионе равнялось 63 кг, то при указанных условиях среднее потребление уменьшится на 6,0212 кг.

Или, например, требуется установить, каким должен быть доход на душу населения в следующем году в регионе, если будем иметь такие данные: годовое потребление составит 60 кг, оптовая цена за 100 г – 8 (усл. ед.), расходы на обработку составят 50 %. Опять применяя первое уравнение системы, определим x_1:

$$x_1 = \frac{y_1 + 2{,}3290 y_2}{0{,}00678} = \frac{60 + 2{,}36290 \cdot 8}{0{,}00678} = 1163{,}8 \text{ (усл. ед.)},$$

так должен быть увеличен душевой доход за год по отношению к среднему за предыдущие годы.

§ 7. Прогнозные экономические модели и экстраполяционные методы

Задачами прогнозирования в большинстве случаев становятся получение количественного или качественного описания одного или ряда необходимых показателей, которые и позволяют конкретизировать намечаемые цели в экономике. Однако не всегда возможно выполнить это по имеющимся данным, и конкретизацию целей приходится выполнять по прогнозам косвенных показателей.

7.1. Организация процесса прогнозирования

Сложным и объёмным этапом работ при прогнозировании является сбор необходимых данных. Информационные материалы можно представить как следующие группы наборов данных по направлениям:

- правовые и инструктивные материалы (законы, положения, инструкции и т. п. федерального и местного значения) из внешней среды;
- технико-экономическая информация (данные о продукции, технологии, стоимости и т. п.) из внешней среды;
- рыночная информация (цены, состав продукции, объёмы продаж, потребности), источник – внешняя среда;
- конъюнктурные данные (спрос, предложение, индексы инфляции и т. п.), источник – внешняя среда;
- первичный учёт (обеспечивает данными специализированные системы информации), источник – внутренняя среда;
- учётная и специализированная информация имеет ряд направлений): производственная, экономическая, финансовая, техническая, социальная и т. п.), также источник – внутренняя среда;
- нормативно-справочная информация (используется в созданных на предприятиях информационно-управленческих системах).

Среди организованных систематизированных систем выделяют системы финансового и управленческого учёта. Эти системы тесно связаны, используют информацию первичного учёта, но имеют разное назначение и разный состав решаемых задач. Крупным отличием их является и то, что финансовый учёт обязателен, управленческий учёт организуется по решению администрации предприятия и имеет самые различные варианты реализации.

Продвижение информации можно представить в виде ряда информационных потоков следующих назначений:

1. Финансово-сбытовая деятельность (в основном информация маркетинга).

1.1. Данные деятельности предприятия и данные основных конкурентов (объёмы продаж, цены, издержки и прибыль, данные товаров, реклама).

1.2. Анализ рынка (состав потребителей, ценовая политика, деление рынка, свойства потребительских товаров, состояние рекламы).

1.3. Общая социально-экономическая информация (демографическая информация, динамика цен, тенденции в экономике).

2. Снабженческо-заготовительная деятельность (объёмы запасов, учёт затрат, затраты на хранение, циклы поставок).

3. Учёты производственной деятельности (учёт затрат по статьям себестоимости, деление на постоянные, переменные).

4. Учёт организационной деятельности (учёт по центрам затрат, отчётность об экономических результатах).

5. Бухгалтерская и статистическая отчётность (бухгалтерский баланс, отчёт о прибылях и убытках, отчёт о движении капитала, отчёт о движении денежных средств, приложение к бухгалтерскому балансу, статистические формы отчётности).

6. Правовое и инструктивное обеспечение деятельности предприятия (нормативные акты, акты разъяснительного характера, ведомственные документы, документы законодательства области, учредительные документы).

Перечисленные информационные потоки и информационные массивы используются для решения целого ряда задач прогнозирования. Среди этих задач часто приходится прогнозировать будущие денежные потоки, в первую очередь – операционные (производственные). Этот прогноз связан с показателями инфляции стоимости различных ресурсов и изменениями цен на продукцию или услуги самого предприятия. Инвестиционные и финансовые денежные потоки предприятия связаны с прогнозами изменений в составе основных фондов, займами и выплатами по ним, операциями с ценными бумагами. Следующая группа задач связана с прогнозированием стоимости имущества предприятия, стоимости самого бизнеса, формированием портфеля ценных бумаг, переоценкой стоимости фондов предприятия.

Важной задачей для предприятий стало прогнозирование ряда показателей для работы службы маркетинга. Среди ранее названных данных важен прогноз показателей конкурентоспособности товаров, показателей будущего состояния рынка, продолжительности жизни товаров и др. Наконец, крупной задачей прогноза по повышению эффективности производства являются прогнозы, связанные с инвестициями. Среди прогнозируемых показателей здесь фигурируют: сроки окупаемости, внутренняя норма доходности, индексы рентабельности и коэффициенты эффективности инвестиций. Таким образом, прогнозирование охватывает самые различные стороны работы предприятия и связано с информацией от целого ряда объектов: предприятий, организаций, учреждений, в том числе инвесторов, арендаторов, конкурентов, поставщиков.

7.2 Экономические прогнозы

При экономическом прогнозировании наиболее часто исследователя интересуют ценовые прогнозы. Прогнозирование при этом производится наиболее часто в следующих направлениях:

- выбор путей развития (оценка альтернатив);
- изыскание оптимальных путей достижения целей;
- определение необходимых ресурсов и эффективности при реализации определённых решений и деятельности.

Для прогнозирования используются многочисленные методы:

а) приёмы сходства и различий, используемые как методы прогнозирования;

б) методы интер- и экстраполяции, математической статистики, моделирование, экспертные оценки и др.;

в) адапционные, сетевые, балансовые, программно-целевые методы и др. (группа сложных методов).

Приёмы сходства и различий развития экономических процессов широко используются для разных уровней макро- и микроэкономики. Производится сравнение близких по условиям развития объектов, а также описательный анализ сходных и отличающихся факторов, делаются предположения-прогнозы. Подобные приёмы не являются определяющими, но позволяют в отдельных случаях предупредить ошибки при использовании других методов прогнозирования, многочисленности аналогов развития событий, делать достаточно серьёзные прогнозы.

Сравнительные экономические прогнозы используют при крупных разработках типа программно-целевого планирования, т. е. с ними делают обоснование целевых программ для крупных хозяйственно-технических комплексов и т. п.

Рассмотрим экономический прогноз на примере организации выпуска крупного изделия.

Конечно, затраты в течение времени для крупных изделий определяются тенденциями в экономике, изменением производительности труда в этой отрасли и зависят от многих факторов: стоимости затрат труда, материалов, энергии; технологичности производства, характеристик изделия.

Пусть себестоимость зависит от ряда параметров:

$$C = a_0 \times \prod x_i^{\lambda_i},$$

где буквы – показатели модели.

Возьмём отношение стоимостей двух образцов изделия:

$$\frac{C_1}{C_2} = \ddot{I}\left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}\right)^{\lambda_i}.$$

Тогда если стоимость одного изделия можно найти по стоимости другого, то:

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 \times \ddot{I}\left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}\right)^{\lambda_i}.$$

Часто изделия отличаются только количественными характеристиками. Можно представить как интегральный индекс изменения себестоимости:

$$\frac{C_1}{C_2} \times \ddot{I}\left(\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}\right)^{\lambda_i} = J^{(1,2)}.$$

Иногда изделия отличаются только отдельными свойствами, тогда это отношение будет частным индексом.

Пусть изменение стоимости только по одному свойству будет:

$$\frac{C_{11}}{C_{21}} = J_1,$$

а по другому свойству:

$$\frac{C_{12}}{C_{22}} = J_2.$$

Исходя из этого, интегральный индекс будет:

$$J^{(1,2)} = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n.$$

Введение интегрального индекса позволяет вывести себестоимость любого изделия, если известна себестоимость одного образца.

Впоследствии приходится учитывать изменение себестоимости изделия в зависимости от освоения производства. Как известно, величина себестоимости зависит от многих факторов: объёмов производства, стоимости используемых ресурсов производства и др.

Исследования по отдельным технически сложным объектам показали, что подобную зависимость можно аппроксимировать какой-нибудь типовой криволинейной зависимостью. Более широкое использование нашло для многих ценовых и объёмных оценок методы цепных индексов. Эти методы используются для прогноза показателей, которые меняются из года в год, но прямой функциональной зависимости между ними нет (например, потребность отрасли в определённых ресурсах). Такие показатели, как характер изменения цен, объёмы закупок, торговый оборот, можно выявить с использованием индивидуальных индексов. Для получения индивидуальных индексов берутся отношения из одного ряда определённых наблюдений: например, отношение цены на нефть 2014 г. к цене на нефть 2010 г. (тонны). В отличие от индивидуальных индексов, общие (агрегатные) индексы дают представление о развитии во времени ряда показателей. Часто агрегатные индексы носят название по фамилии предложивших их экономистов (например, Карли, Маршалла, Лоу, Фишера и др.). Для конструирования индексов требуются определённые данные. Пусть $\mathbf{p}_{i_0}$ и $\mathbf{p}_{i_1}$ – цена товара i в базовый и текущий периоды, $\mathbf{q}_{i_0}$ и $\mathbf{q}_{i_1}$ – объёмы закупок i товара также в базовый и текущий периоды. Тогда индекс Лоу может быть представлен следующей формулой, где $\mathbf{q}_i$ – средние объёмы закупок:

$$\mathbf{LW}_{01} = \frac{\sum \mathbf{p}_{i_1} \times \mathbf{q}_i}{\sum \mathbf{p}_{i_0} \times \mathbf{q}_i}.$$

Рассмотрим пример, по которому данные по закупкам и ценам на яблоки А, груши В, апельсины С сведены в таблице.

Исходные данные

Виды фруктов	А		В		С	
Показатели	p	q	p	q	p	q
Базовый год	10	20	5	20	12	10
Отчётный год	15	10	10	25	20	20

Тогда средние величины будут:

$$q_{i_A} = \frac{20+10}{2} = 15; \qquad q_{i_e} = \frac{20+25}{2} = 22{,}5; \qquad q_{i_C} = \frac{10+20}{2} = 15.$$

Индекс Лоу составит:

$$LW_{01} = \frac{15\times 15 + 10\times 22{,}5 + 20\times 15}{10\times 15 + 5\times 22{,}5 + 12\times 15} \times 100 = 169.$$

Знание индексов позволяет производить связывание рядов по товарам, т. е. в случае, если для одного товара имеются данные по годам, а для другого – на смещённые годы. Разобранный пример индекса Лоу даёт представление в основном по изменениям цен на близкие группы товаров, и в случае, если выпадает какой-либо товар и на него отсутствует информация, индекс позволяет предположить определённое изменение цен (так, в нашем случае 169 %).

Определённые свойства индексов могут облегчить их использование при прогнозировании и расчётах:

1. Связывание. Если для товара имеется два ряда индексов с разными базами, то эти ряды можно связать и получить единый

ряд, годный для последующего использования. В следующей таблице даны исходные данные.

Исходные данные

Годы	2000	2002	2004	2006	2008
Темп роста, %	100	106	110		
			100	105	108

Индекс на 2006 г. можно найти следующим образом:

$$\frac{x}{105} = \frac{110}{100}; \qquad x = I^{1}_{2006} = 115{,}5 .$$

Аналогично определяется и индекс на 2008 г.:

$$\frac{x}{108} = \frac{110}{100}; \qquad x = I^{1}_{2008} = 118{,}8 .$$

В результате имеется единый ряд индексов следующего вида:

Применение метода «Связывание»

Годы	2000	2002	2004	2006	2008
Темп роста, %	100	106	110	115,5	118,8

2. Круговое свойство. Для индивидуальных индексов и для индекса Лоу соблюдается круговое свойство индексов:

$$\mathbf{I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \times I_{34} = I_{04}} .$$

Как видно из предыдущей формулы, произведение индексов можно получить сразу, если использовать базовые и конечные отчётные данные.

Для перспективного, прогнозного анализа могут быть использованы свойства индексов, позволяющие определить влияние факторов.

Так, определить влияние на реализацию объёма или цен можно по формулам.

- Влияние количества:

$$\mathbf{\Sigma q_1 \times p_0 - \Sigma q_0 \times p_0},$$

где $\mathbf{q_1}$ – новое количество;

$\mathbf{q_0}$ – базовое количество;

$\mathbf{p_0}$ – базовая цена.

- Влияние цен:

$$\mathbf{\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_1 \times p_0},$$

где p_0, p_1 – старая и новая цена.

- Объединённая формула:

$$\mathbf{\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_0 \times p_0 = (\Sigma q_1 \times p_0 - \Sigma q_0 \times p_0) + (\Sigma q_1 \times p_1 - \Sigma q_1 \times p_0)}.$$

Часто эта зависимость связывает производительность (выработку) и число работников с общим объёмом. Здесь проще, можно использовать количество:

$$\mathbf{\overset{N}{I} = \frac{\sum D_1R_1}{\sum D_0R_0}};$$

$$\overset{N}{\mathbf{I}} = \frac{\sum \mathbf{D_0 R_1}}{\sum \mathbf{D_0 R_0}} \cdot \frac{\sum \mathbf{D_1 R_1}}{\sum \mathbf{D_1 R_1}};$$

$$\overset{N}{\mathbf{I}} = \overset{R}{\mathbf{I}} \times \overset{D}{\mathbf{I}},$$

где $\overset{N}{\mathbf{I}}$ – общий индекс изменения объёма продукции;

$\overset{K}{\mathbf{I}}$ – индивидуальный факторный индекс изменения численности;

$\overset{D}{\mathbf{I}}$ – факторный индекс изменения производительности труда;

$\mathbf{D_0, D_1}$ – среднегодовая выработка продукции на одного работающего в базисном и отчётном периоде;

$\mathbf{R_0, R_1}$ – среднегодовая численность в базисном и отчётном периоде.

По следующей формуле можно определить отклонение (прирост) обобщающего показателя – объём:

$$\Delta \overset{T}{\mathbf{N}} = \Sigma \mathbf{D_1 R_1} - \Sigma \mathbf{D_0 R_0},$$

где $\Delta \overset{T}{\mathbf{N}}$ – абсолютный прирост.

По следующей формуле можно определить прирост объёма за счёт изменения численности:

$$\Delta \overset{T}{\mathbf{N}}_{\mathbf{R}} = \Sigma \mathbf{D_0 R_1} - \Sigma \mathbf{D_0 R_0}.$$

Прирост за счёт изменения производительности труда можно определить по формуле:

$$\Delta \overset{T}{\mathbf{N}}_{\mathbf{D}} = \Sigma \mathbf{D_1 R_1} - \Sigma \mathbf{D_0 R_1}.$$

Однако теория индексов не даёт возможности провести расчёт влияния более двух факторов.

7.3 Экстраполяционные методы

Экстраполяционные методы (или интерполяция) используют, как и многие другие методы, информацию об объекте и среде, но в виде временных рядов.

Временные (динамические) ряды возникают, когда имеется ряд наблюдений за отдельным параметром (параметрами – факторами); каждое из наблюдений может быть поставлено в определённый момент времени на протяжении определённых временных периодов, охватывающих некоторую ретроспективу. Временной ряд помогает установить наиболее типичное в развитии.

Временной ряд подвержен влиянию эволюционного, колебательного фактора, а также разовым воздействиям:

а) под влиянием эволюционного характера подразумевается тренд в развитии – долго проявляющиеся основные изменения;

б) под влияниями колебательного характера понимаются конъюнктурные и сезонные колебания;

в) к разовым воздействиям можно отнести изменения, вызываемые экологической катастрофой (засуха, дожди) и т. п.

Временной ряд, таким образом, составляется из ряда компонент и подвергается разнообразным воздействиям со стороны как внешних, так и внутренних факторов.

Основные компоненты временного ряда: трендовая (Т), конъюнктурная (К), сезонная (S) и разовое воздействие (Е).

Модель временного ряда может быть представлена зависимостью:

$$\mathbf{y = f\,(T, К, S, E).}$$

Различают аддитивную и мультипликативную модели временного ряда. Первая отличается тем, что характер циклических и сезонных изменений остаётся постоянным, вторая – тем, что характер изменений остаётся постоянным только по отношению к тренду (но может, например, меняться по величине).

Поскольку временной ряд имеет один или несколько показателей во времени, то он будет двухмерным распределением, которое можно представить таблицей данных.

Характеристиками двухмерного распределения временного ряда будут:

а) средние значения

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1} y_j;$$

б) дисперсия

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\left(x_i - \bar{x}\right)^2;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}\left(y_j - \bar{y}\right)^2;$$

в) временной ряд может быть представлен зависимостью:

$$y_t = x_t + \varepsilon_t,$$

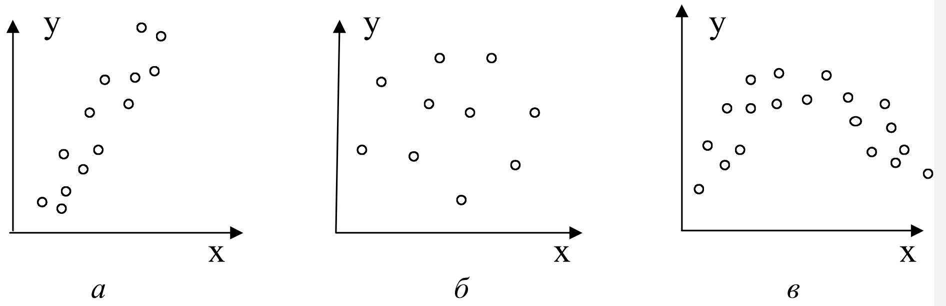
где x_t – детерминированная составляющая (T),

ε_t отражает случайные составляющие (K, S, E).

Первым этапом экстраполяции тренда на базе набранной информации и построенного временного ряда является выбор оптимального вида функции, описывающей эмпирический ряд.

Предварительную оценку наличия связи между параметрами может дать **поле корреляции** (графики, отражающие связь между показателями, рис.).

Графики позволяют предположить о наличии тесной или слабой связи, линейной или нелинейной.



Графики, отражающие связь между показателями: а – прямолинейная, б – рассеянное поле, в – нелинейная зависимость

Более полное представление даёт таблица.

Корреляционная таблица

X Y	88–340	340–592	592–844	Итого
103–303	9	1		10
303–503	2	1		3
503–703			2	2
Итого	11	2	2	15

Может быть концентрация точек (так называемых частот) вокруг диагонали, что показывает наличие обратной связи. Частоты могут быть сконцентрированы вдоль противоположной диагонали (как в данном случае) – это прямая связь (рис. 1). Если точки (частоты) разбросаны, то связь отсутствует (слабая) (рис. 2).

Как уже отмечалось ранее, на временной ряд оказывают влияние случайные составляющие, и важной задачей является выявление основного влияния – тренда. **Тренд** – это долговременные составляющие временного ряда. Определение трендовой компоненты можно проводить рядом методов и самый простейший – это метод «на глаз»:

а) *простейший визуальный метод*. Строится поле корреляции, и, очертив его, пытаются провести линию тренда; в этом случае линия тренда покажет основное направление изменения статистической зависимости;

б) *метод скользящих усреднений.* Суть метода состоит в том, чтобы путём построения средних значений смягчить колебания и сохранить тренд. Временной ряд делят на участки, содержащие, например, три соседние точки для каждого момента времени, и далее отслеживают среднее значение для каждого момента времени.

в) *метод усреднения по левой и правой половине.* При этом методе делят временной ряд на две части, строят для каждой из них среднее арифметическое и проводят через построенные точки линию тренда.

г) *метод экспоненциального сглаживания.* Методы сглаживания разделяются на две основные группы:

- сглаживание или механическое выравнивание уровней временного ряда с использованием фактических значений других уровней ряда;
- выравнивание с применением кривой, проведённой между конкретными уровнями временного ряда, таким образом, чтобы она отображала тенденцию, присущую ряду, и одновременно освобождала его от незначительных колебаний.

Применение кривых предполагает существование некой закономерности на протяжении некоторого периода предыстории.

Суть методов механического сглаживания заключается в следующем: берутся несколько первых членов ряда, образующих так называемый интервал сглаживания. Для них подбирается кривая, аналитическим выражением которой служит полином, степень которого должна быть меньше числа уровней, образующих интервал сглаживания. С помощью полинома определяется новое выровненное значение члена, находящегося в середине интервала сглаживания. Далее интервал сглаживания сдвигается на один член вправо, вычисляется следующее выровненное значение ряда, вновь производится сдвиг, вычисление и т. д. В соответствии с этой схемой реализуются методы простой и взвешенной скользящей средней, а также их разновидности.

Графический метод определения тенденции с использованием методов сглаживания несколько субъективен, он не позволяет численно, с заданной степенью достоверности оценить наличие тенденции в исследуемом процессе. Для большинства принимаемых тактических и тем более стратегических решений численная оценка о наличии существования тенденции крайне важна. Существующие численные методы определения наличия тенденции отличаются друг от друга по сложности вычислений, универсальности, возможностям использования ПК для автоматизации расчёта и т. д.

Один из простых методов проверки временного ряда на тренд – знаковый критерий тренда Кокса и Стюарта:

- исходный временной ряд $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ делят на три группы, так чтобы первая и последняя треть содержала одинаковое число уровней n = n/3. Если n на три не делится, то средняя треть уменьшается на одно или два наблюдения;
- каждое наблюдение первой трети ряда сравнивается с соответствующим наблюдением последней трети ряда и фиксируется знаком плюс при убывающем тренде, минус – при возрастающем тренде, в зависимости от знака разности. Сумму знаков «плюс» или «минус» обозначаем через S;
- вычисляем величину Z, которая подчиняется нормальному закону распределения со стандартным отклонением $\sqrt{n/12}$ по одной из следующих формул:

$$\hat{Z} = \frac{\left(S - \frac{n}{6}\right)}{\sqrt{\frac{n}{12}}}, \text{ при } n \geq 30,$$

$$\hat{Z} = \frac{\left(S - \frac{n}{6}\right) - 0{,}5}{\sqrt{\frac{n}{12}}}, \text{ при } n < 30,$$

где n – число уровней исходного временного ряда;

- расчётное значение Z сравниваем с критическим значением. Критические значения (односторонние или двусторонние) равны:

Z = 1,64 и Z = 1,96 для a = 5 %,
Z = 1,28 и Z = 1,64 для a =10 %.

Пример:

За ряд лет в стране были следующие показатели по урожаю (ц с га): 9,5; 13,7; 12,1; 14,0; 13,2; 15,6; 15,4; 14,0; 17,6; 15,4; 10,9; 17,5; 15,0.

Результаты расчёта

Значения первой трети	9,5	13,7	12,1	14,0	13,2
Значения последней трети	17,6	15,4	10,9	17,5	15,0
Знаки разностей	–	–	+	–	–

Мы получили четыре отрицательных знака из пяти, S = 4. Проверка на возрастающий тренд даёт:

$$\hat{Z} = \frac{\left(4 - \frac{13}{6}\right) - 0{,}5}{\sqrt{13/12}} = 1{,}282.$$

То есть это возрастающий тренд при установленном 10 % уровне погрешности.

Этот наиболее известный метод в упрощённом виде использован в методе б. Идея метода сглаживания – производить расчёт тренда с учётом ретроспективных данных на интервал упреждения, а использование прошлых данных уменьшать. При этом более поздним наблюдениям присваивается больший вес, чем ранним. Вес наблюдений убывает по экспоненте.

Для нахождения экспоненциальной средней используют рекуррентную формулу, где и используется параметр α для сглаживания:

$$S^K(y) = \alpha S^{(K-1)}(y) + (1-\alpha)S^K(y),$$

где $S^1, S^2, ..., S^K$ – экспоненциальные средние, которые находят с использованием начальных условий, определяемых по специальным формулам;

д) *метод наименьших квадратов*. При этом методе линию тренда подгоняют к наблюдаемым значениям таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной.

Выражение $\sum(x_i - \bar{x})^2$ характеризуется как сумма квадратов отклонений. Если мы можем считать тренд линейным, то в качестве модели для y можно полагать $y = a + bt$ и для любой точки должна соблюдаться зависимость:

$$\sum(\ell_i)^2 = \sum(y_i - a - bt_i)^2 = \min,$$

где ℓ_i – расстояние от точки i до прямой.

Для a и b существуют формулы:

$$a = \bar{y} - b\bar{t};$$

$$b = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})}{\sum_{t=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}.$$

Если мы рассмотрим, например, многочлен шестой степени, то сумма квадратов отклонений будет практически равна нулю (идеальное приближение). Тем не менее, это обманчивая ситуация, т. к. сумма не информативна для получения прогнозируемых значений. В этом случае линейное приближение может обеспечить более правдоподобный прогноз.

Конечными целями прогноза для предприятия может быть большой их перечень, включающий повышение прибыльности, расширение рынка сбыта, рост объёмов производства, сокращение издержек производства, повышение оборачиваемости капиталов, организация инвестиций, совершенствование организационной структуры, улучшение состава стоимости имущества и другое. Для достижения всех этих целей, в смысле их прогнозирования, необходимо использовать перечисленные выше методы, устанавливающие трендовую составляющую. Эти методы используют временные ряды и различные статистические критерии из математической статистики.

Контрольные вопросы

1. Перечислить основные виды переменных при моделировании процессов.

2. Каковы основные классы моделей, их суть?

3. Перечислить основные этапы моделирования социальных процессов. Их краткая характеристика.

4. Какова суть линейной модели парной регрессии?

5. Дать определение коэффициента ковариации, его назначение и пределы изменения.

6. Дать определение линейного коэффициента корреляции, его назначение, пределы изменения.

7. Дать определение средней ошибки аппроксимации, её пределов.

8. Суть коэффициента детерминации, его назначение, пределы изменения.

9. Каковы оценки проверки качества линейной модели?

10. Назвать нелинейные модели, их суть и применение.

11. Какова суть множественной линейной модели, её задачи и цели?

12. В чём суть проблемы мультиколлинеарности?

13. Дать понятие фиктивного фактора, его применение.

14. Какова структура временных рядов, их применение?

15. Какова структура системы одноврменных уравнений?

16. В чём суть косвенного метода наименьших квадратов?

17. Дать определение идентификации уравнений и системы уравнений.

18. Сформулировать необходимые условия идентикации системы.

19. Сформулировать достаточные условия идентификации системы.

20. В чём суть двушагового метода наименьших квадратов?

21. Дайте определение прогнозирования.

22. Определите характеристику видов прогноза.

23. Какова общая схема методов прогнозирования?

24. Сформулируйте основные этапы прогнозирования.

25. Какова цель классификации объектов прогнозирования?
26. Какова классификация объектов прогнозирования по их масштабам?
27. В чём состоит содержание метода экстраполяции?
28. Дайте понятие метода экстраполяционного сглаживания.
29. Определите понятие метода адаптивного сглаживания.
30. В чём состоит суть метода наименьших квадратов?

Заключение

Данное пособие соответствует академическому уровню магистров. В нём достаточно кратко освещены основные математические методы и модели прогностики и прогнозирования. То есть пособие почти полностью посвящено понятию математического моделирования социальных процессов, в которых описано, как составляются и исследуются линейные и нелинейные модели с одной переменной, линейные модели со многими переменными, введены понятия временных рядов, их использование для описания социальных процессов. Достаточно широко описаны системы одновременных уравнений, которые в настоящее время очень широко используются для описания не только социальных процессов, но и для прогнозирования экономических процессов и явлений на любом уровне: микроуровне (модели поведения потребителя, фирм, предприятий, семьи); мезоуровне (модели региональной экономики, отраслей, секторов); макроуровне (модели национальной политики, т. е. страны в целом).

Следует отметить, что любая математическая модель является лишь упрощённым вариантом формализованного представления реального объекта, явления или процесса. Искусство исследователя состоит в том, чтобы построить такую модель, которая с достаточной адекватностью описывала бы все те стороны моделируемой реальности, которые интересуют исследователя, а следовательно, ей будет соответствовать вероятностный прогноз. Количество связей в выбранной модели должно зависеть от условий, при которых эта модель конструируется, от подробности объяснения, к которой стремится исследователь. Например, модель спроса и предложения, которая должна объяснять соотношения между ценой и объёмом выпуска товара, характерные для некоторого определённого рынка. Эта модель всегда должна содержать три уравнения: уравнение спроса, уравнение предложения и уравнение реакции рынка. Отметим, что в эти уравнения могут входить и другие переменные, кроме объёма выпуска и цены.

Все экономические модели независимо от их характера и направленности имеют некоторые общие особенности:

- они основаны на предложении, что поведение экономических переменных определяется с помощью совместных и одновременных операций с некоторым числом экономических соотношений;
- применяется гипотеза, в силу которой модель, допускающая упрощение реальной действительности, тем не менее, описывает главные характеристики изучаемого объекта;
- исследователь полагает, что созданная им модель даёт понимание реальной действительности, а также может предсказать её будущее и, возможно, управлять ею в целях улучшения экономического благосостояния.

Все вышесказанное – это очень большая и трудоёмкая деятельность, и в этом случае на помощь приходит компьютерная техника, которая может освободить исследователя от громоздкой вычислительной работы.

Библиографический список

1. Доугерти, К. Введение в эконометрику / К. Доугерти. – пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 402 с.

2. Кикоть, В. Я. Социальное управление. Теория, методология, практика [Электронный ресурс] : монография / В. Я. Кикоть, Д. И. Грядовой. – Электрон. текстовые данные. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 311 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/15463. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

3. Кузык, Б. Н. Прогнозирование, стратегическое планирование и национальное программирование [Текст] : учеб. для студ. вузов / Б. Н. Кузык, В. И. Кушлин, Ю. В. Яковец. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Экономика, 2011. – 604 с.

4. Сафронова, В. М. Прогнозирование, проектирование и моделирование в социальной работе [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В. М. Сафронова. – 4-е изд., стер. – М. : ИК Академия, 2011. – 235 с.

5. Прогностика: Терминология. – М. : Мысль, 1990. – 102 с.

6. Прогнозное социальное проектирование: теоретико-методологические и методические проблемы. – М. : Наука, 1994. – 304 с.

7. Рабочая книга по прогнозированию / ред. И. В. Бестужев-Лада. – М. : Мысль, 1982. – 430 с.

8. Эконометрика : учебник / под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистка, 2009. – 344 с.

9. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавров / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. – Электрон. текстовые данные. – М. : Дашков и К, 2013. – 188 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14124. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

10. Абрашин, Е. А. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. А. Абрашин, В. А. Комаров. – Электрон. текстовые данные. – Волгоград : Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009. – 207 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11367. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

11. Экономико-математические методы и прикладные модели [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Федосеев [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 304 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/15500. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

12. Новиков, А. И. Эконометрика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. И. Новиков. – Электрон. текстовые данные. – М. : Дашков и К, 2013. – 224 с. – Режим доступа: http: //www.iprbookshop.ru/14118. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

13. Буравлёв, А. И. Эконометрика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. И. Буравлёв. – Электрон. текстовые данные. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 165 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12284. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

14. Орлов, А. И. Эконометрика [Электронный ресурс] / А. И. Орлов. – Электрон. текстовые данные. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2009. – 623 с. – Режим доступа: http: //www.iprbookshop.ru/16739. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

15. Яковлева, А. В. Эконометрика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. В. Яковлева. – Электрон. текстовые данные. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2011. – 153 с. – Режим доступа: http: // www.iprbookshop.ru/946. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

Приложение 1

Двусторонние квантили распределения Стьюдента $t_\alpha(n)$

N\ά	0.20	0.40	0.50	0.60	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
1	0.325	0.727	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.693	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.681	0.851	1.301	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	0.254	0.526	0.677	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	0.254	0.525	0.676	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601
∞	0.253	0.524	0.675	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Приложение 2

95 %-квантили распределения Фишера F(k_1,k_2)

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.47	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.45	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.10	1.94	1.88	1.83

У е

Ридчен ванович

Математические модели и методы социального и экономического прогнозирования

Учебное пособие для студентов направления подготовки высшего образования – магистратуры «Экономика»

Редактор Н. В. Сафронова
Компьютерная вёрстка Н. В. Сафроновой

Подписано в печать 08.04.2016 г.
Печать на ризографе. Бумага офсетная. Формат 60×84/16.
Печ. л. 5,25. Уч.-изд. л. 2,28. Тираж 100 экз. Заказ 24.

Омская гуманитарная академия
644105, Омск, ул. 4-я Челюскинцев, 2а.

Отпечатано в полиграфическом отделе издательства
Омской гуманитарной академии.
644105, Омск, ул. 4-я Челюскинцев, 2а, тел. 28-47-43.

Стр. 18: [1] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [2] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [3] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [4] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [5] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [6] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [7] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [8] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [9] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [10] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [11] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [12] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [13] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [14] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [15] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [16] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [17] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [18] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [19] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [20] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [21] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [22] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [23] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [24] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [25] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [26] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [27] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [28] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [29] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [30] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [31] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [32] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [33] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [34] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [35] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [36] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [37] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [38] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [39] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [40] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [41] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [42] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [43] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [44] Отформатировано	**Unknown**	**18.03.2004 0:27:00**

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [45] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [46] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [47] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [48] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [49] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [50] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [51] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [52] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [53] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [54] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [55] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [56] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Междустр.интервал: множитель 1,15 ин

Стр. 18: [57] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [58] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [59] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [60] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [61] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [62] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [63] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [64] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [65] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [66] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 18: [67] Отформатировано	Unknown	18.03.2004 0:27:00

Шрифт: 14 пт